

Kvadratické rovnice – Příklad y z maturitních testů

1)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - 1$$

2)

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x-3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$$

3)

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1$$

4)

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

5)

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{x^2-1}$$

6)

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2+2x} = \frac{x}{x+2}$$

7)

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1}$$

8)

$$\frac{2x+1}{x+1} = 3 + \frac{2}{x-1}$$

9)

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} - \frac{3}{2} = 0$$

10)

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2-2x} - 1$$

11)

$$x \cdot \left(\frac{2x-6}{x-6} - 1 \right) = \frac{6-7x}{6-x}$$

12)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot x = 1 - \frac{x}{6}$$

13)

$$2x-3 = (2x-3)(2x+3)$$

14)

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

15)

$$\frac{1}{3x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

16)

$$1 = \frac{(2x-3)^2}{12x+9}$$

17)

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0.$$

18)

$$\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x}$$

19)

$$3x(x+1) = 9x^2$$

Kvadratické rovnice – Příklad z maturitních testů

1)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - 1$$

Řešení

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - 1$$

Podmínky

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} - 1 \quad / \cdot x(x-1)$$

$$x \neq 0 \quad x-1 \neq 0$$

$$x-1 = x-1-x(x-1)$$

$$x \neq 1$$

$$x-1 = x-1-x^2+x$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$x_1=0; x_2=1$$

Ani jedno číslo nesplňuje podmínky, proto je výsledkem prázdná množina.

Výsledek: $K = \emptyset$

2)

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x-3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$$

Řešení

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x-3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$$

Podmínky

$$\frac{x-3}{5x} + \frac{x}{2(x-1)} = \frac{3}{4} \quad / \cdot 20x(x-1)$$

$$x \neq 0 \quad x-1 \neq 0$$

$$4(x-1)(x-3) + 10x^2 = 15x(x-1)$$

$$x \neq 1$$

$$4(x^2-3x-x+3) + 10x^2 = 15x^2-15x$$

$$4x^2-12x-4x+12+10x^2=15x^2-15x$$

$$-x^2-x+12=0$$

$$D=b^2-4ac=(-1)^2-4 \cdot (-1) \cdot 12=49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 7}{-2}$$

$$x_1=-4; x_2=3$$

Výsledek: $x_1=-4; x_2=3$ nebo $K=\{-4;3\}$

3)

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1$$

Řešení

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1$$

Podmínky

$$\frac{x-2}{x(x+2)} + \frac{2x}{x+2} = 1 \quad / \cdot x(x+2) \quad x \neq 0 \quad x \neq -2$$

$$x-2+2x^2 = x^2+2x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$D=b^2-4ac=(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot (-2)=9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x_1=2; x_2=-1$ obě čísla vyhovují

Výsledek: $x_1=2; x_2=-1$ nebo $K=\{-1;2\}$

4)

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

Řešení

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

Podmínky

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x(x-1)} = \frac{5}{x} \quad / \cdot x(x-1) \quad x \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$x(x+5)+5x-1=5(x-1)$$

$$x^2+5x+5x-1=5x-5$$

$$x^2+5x+4=0$$

$$D=b^2-4ac=5^2-4 \cdot 1 \cdot 4=9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$x_1=-1; x_2=-4$ obě čísla vyhovují

Výsledek: $x_1=-1; x_2=-4$ nebo $K=\{-1;-4\}$

5)

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{x^2-1}$$

Řešení

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{x^2-1}$$

Podmínky

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{(x+1)(x-1)} \quad / \cdot (x+1)(x-1)$$

$$x \neq 1 \quad x \neq -1$$

$$(x+8)(x+1) + x(x-1) = 32$$

$$x^2 + x + 8x + 8 + x^2 - x = 32$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24) = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 16}{4}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -6 \quad \text{obě čísla vyhovují}$$

$$\textbf{Výsledek: } x_1 = 2; x_2 = -6 \text{ nebo } K = \{2; -6\}$$

6)

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2+2x} = \frac{x}{x+2}$$

Řešení

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2+2x} = \frac{x}{x+2}$$

Podmínky

$$\frac{3(x-2)}{x(x+2)} + \frac{16}{x(x+2)} = \frac{x}{x+2} \quad / \cdot x(x+2)$$

$$x \neq 0 \quad x+2 \neq 0$$

$$3x - 6 + 16 = x^2$$

$$x \neq -2$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = -2 \text{ (nevyhovuje podmínce); } x_2 = 5$$

$$\textbf{Výsledek: } x = 5 \text{ nebo } K = \{5\}$$

7)

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1}$$

Řešení

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1} \quad / \cdot (x-5)(x-1)$$

Podmínky

$$x-1 + (x-5)(x-1) = (2x-9)(x-1) + x-5$$

$$x \neq 5 \quad x \neq 1$$

$$x-1 + x^2 - x - 5x + 5 = 2x^2 - 2x - 9x + 9 + x - 5$$

$$-x^2 + 5x = 0$$

$$x(-x+5) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 5 \text{ nevyhovuje podmínice}$$

Výsledek: $x = 0$ nebo $K = \{0\}$

8)

$$\frac{2x+1}{x+1} = 3 + \frac{2}{x-1}$$

Řešení

$$\frac{2x+1}{x+1} = 3 + \frac{2}{x-1} \quad / \cdot (x+1)(x-1)$$

Podmínky

$$(2x+1)(x-1) = 3(x+1)(x-1) + 2(x+1)$$

$$x \neq -1 \quad x \neq 1$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 3(x^2 - x + x - 1) + 2x + 2$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 3x^2 - 3x + 3x - 3 + 2x + 2$$

$$-x^2 - 3x = 0$$

$$x(-x-3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -3$$

Výsledek: $x_1 = -3; x_2 = 0$ nebo $K = \{-3; 0\}$

9)

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} - \frac{3}{2} = 0$$

Řešení

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} - \frac{3}{2} = 0 \quad / \cdot 2(x^2-x-6)$$

$$2(x^2-4) - 3(x^2-x-6) = 0$$

$$2x^2 - 8 - 3x^2 + 3x + 18 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 5$$

Pro $x_1 = -2$ je jmenovatel $x^2 - x - 6$ roven nule, číslo $x_2 = 5$ vyhovuje.**Výsledek:** $x = 5$ nebo $K = \{5\}$

10)

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$$

Řešení

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$$

Podmínky

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x(x-2)} - 1 \quad / \cdot x(x-2)$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$2(x-2) = 5 - x(x-2)$$

$$2x - 4 = 5 - x^2 + 2x$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

Výsledek: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ nebo $K = \{-3; 3\}$

11)

$$x \cdot \left(\frac{2x-6}{x-6} - 1 \right) = \frac{6-7x}{6-x}$$

Řešení

$$x \cdot \left(\frac{2x-6}{x-6} - 1 \right) = \frac{6-7x}{6-x}$$

Podmínka

$$\frac{2x^2 - 6x}{x-6} - x = \frac{6-7x}{-(x-6)} \quad / \cdot (x-6)$$

$$x \neq 6$$

$$2x^2 - 6x - x(x-6) = -(6-7x)$$

$$2x^2 - 6x - x^2 + 6x = -6 + 7x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 6 \text{ - nevyhovuje podmínice}$$

$$x_2 = 1$$

Výsledek: $x = 1$ nebo $K = \{1\}$

12)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot x = 1 - \frac{x}{6}$$

Řešení

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot x = 1 - \frac{x}{6}$$

$$\frac{2x(x-2)}{12} = 1 - \frac{x}{6} \quad / \cdot 12$$

$$2x^2 - 4x = 12 - 2x$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -2$$

Výsledek: $x_1 = 3; x_2 = -2$ nebo $K = \{-2; 3\}$

13)

$$2x - 3 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Řešení

$$2x - 3 = (2x - 3)(2x + 3)$$

$$2x - 3 = 4x^2 - 9$$

$$4x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad x_2 = -1$$

Výsledek: $x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -1$ nebo $K = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

14)

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

Řešení

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

Podmínky

$$\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1-x}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2x(x-2)$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$x + 2(1-x) = x(x-2)$$

$$x + 2 - 2x = x^2 - 2x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -1$$

Vyhovuje pouze $x = -1$

Výsledek: $x = -1$ nebo $K = \{-1\}$

15)

$$\frac{1}{3x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

Řešení

$$\frac{1}{3x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2} \quad / \cdot 3x(x+2)$$

Podmínky

$$x + 2 - 6x = 3x^2$$

$$x \neq 0 \quad x \neq -2$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -2$$

Výsledek: $x = \frac{1}{3}$ nebo $K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

16)

$$1 = \frac{(2x-3)^2}{12x+9}$$

Řešení

$$1 = \frac{(2x-3)^2}{12x+9} \quad / \cdot (12x+9)$$

$$12x+9 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 - 24x = 0$$

$$x(4x-24) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad 4x - 24 = 0$$

$$x_2 = 6$$

Podmínky: $12x+9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{9}{12} \Rightarrow x \neq -\frac{3}{4}$, řešení vyhovuje.

Výsledek: $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ **nebo** $K = \{0; 6\}$

17)

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0.$$

Řešení

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0 \quad / \cdot (3x^2 - 3)$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -1$$

Podmínky: $3x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ a $x \neq -1$, vyhovuje pouze $x = -\frac{2}{3}$

Výsledek: $x = -\frac{2}{3}$ **nebo** $K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

18)

$$\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x}$$

Řešení

$$\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x} \quad / \cdot 2x$$

$$x^2 = 2x + 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 4; x_2 = -2$$

Podmínky: $x \neq 0$, řešení vyhovuje

Výsledek: $x_1 = 4; x_2 = -2$ **nebo** $K = \{-2; 4\}$

19)

$$3x(x+1) = 9x^2$$

Řešení

$$3x(x+1) = 9x^2$$

$$3x^2 + 3x = 9x^2$$

$$6x^2 - 3x = 0$$

$$x(6x-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 6x - 3 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Výsledek: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$ **nebo** $K = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$
