

Posloupnosti a finanční matematika

Podzim 2025

12 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: $a_3 + a_5 = 0$, $a_1 = 9$

Vypočtěte

12.1 čtvrtý člen a_4 posloupnosti,

12.2 součet prvních pěti členů posloupnosti.

Řešení

12.1

$$a_3 + a_5 = 0$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 4d = 0 \quad a_1 = 9$$

$$9 + 2d + 9 + 4d = 0$$

$$d = -3$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 9 + 3 \cdot (-3) = 0$$

12.2

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_1 = 9$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 9 + 4 \cdot (-3) = -3$$

$$s_5 = \frac{5}{2}(9 + (-3)) = 15$$

Výsledek: 12.1 $a_4 = 0$, 1 bod; 12.2 $s_5 = 15$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Lenka nakoupila dluhopis za cenu 200 tisíc korun.

Po uplynutí doby splatnosti dluhopisu Lenka obdržela 234 tisíc korun, což byla nákupní cena dluhopisu navýšená o úrok zdaněný 15% daní z příjmu.

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

15.1 Lenka obdržela částku o 17 % vyšší, než byla nákupní cena dluhopisu.

15.2 Daň z úroku z Lenčina dluhopisu činila 6 000 korun.

15.3 Úrok z dluhopisu byl před zdaněním o 15 % vyšší než po zdanění.

Řešení

15.1

200 000100%

234 000 x%

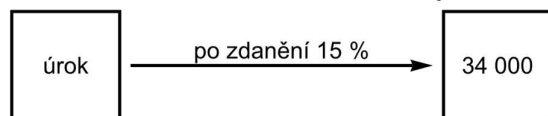
$$\frac{x}{100} = \frac{234000}{200000}$$

$$x = 100 \cdot \frac{234000}{200000} = 117\%$$

A

15.2

Lenka dostala navíc 34 000 Kč, což je úrok zdaněný 15% daní z příjmu



y Kč 100 %

34 000 Kč 85 %

$$y = \frac{34000}{85} \cdot 100 = 40000$$

Úrok byl 40 000 Kč

$$40000 - 34000 = 6000$$

Daň z úroku z Lenčina dluhopisu byla 6 000 Kč.

A

15.3

Úrok před zdaněním 40 000 Kč

Úrok po zdanění 34 000 Kč

34 000100%

40 000 x%

$$\frac{x}{100} = \frac{40000}{34000} / \cdot 100$$

$$x = 100 \cdot \frac{40000}{34000} = 117,64\%$$

Úrok byl před zdaněním o 17,64% vyšší a ne o 15%

N

Výsledek: A A N, max. 3 body

Jaro 2025

13 V nekonečné geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_3 = 5, \frac{a_4}{a_2} = 9$$

13.1 Vypočtete pátý člen a_5 posloupnosti.

13.2 Určete, kolikrát větší je součet členů $a_5 + a_6$ než součet členů $a_1 + a_2$.

Řešení

$$\frac{a_4}{a_2} = 9$$

$$\frac{a_1 \cdot q^3}{a_1 \cdot q} = 9$$

$$q^2 = 9$$

$$q_1 = 3$$

$$q_2 = -3$$

Řešení pro $q = 3$

$$a_3 = 5$$

$$a_2 = \frac{5}{3}$$

$$a_1 = \frac{5}{9}$$

$$a_4 = 15$$

$$a_5 = 45$$

$$a_6 = 135$$

$$\frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2} = \frac{45 + 135}{\frac{5}{9} + \frac{5}{3}} = 81$$

Řešení pro $q = -3$

$$a_3 = 5$$

$$a_2 = -\frac{5}{3}$$

$$a_1 = \frac{5}{9}$$

$$a_4 = -15$$

$$a_5 = 45$$

$$a_6 = -135$$

$$\frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2} = \frac{45 - 135}{\frac{5}{9} - \frac{5}{3}} = 81$$

Výsledek: 13.1 $a_5 = 45$; 13.2 81krát, max. 2 body

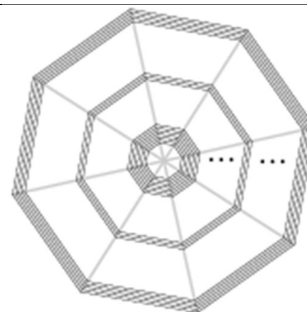
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

V husté dekorační pavučině jsou na drátěné konstrukci napnutá vlákna. Každé vlákno je napnuto kolem dokola a připevněno ke všem drátům konstrukce.

Nejkratší vlákno je nejbližší středu a jeho délka je 24 cm.

Každé další vlákno je o 4 mm delší než předchozí.

Poslední vlákno napnuté po obvodu pavučiny má délku 2 m.



22 Kolik vláken je celkem použito v dekorační pavučině?

- A) méně než 450 vláken
- B) 450 vláken
- C) 500 vláken
- D) 550 vláken
- E) více než 550 vláken

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože „Každé další vlákno je o 4 mm delší než předchozí.“

$$a_1 = 25 \text{ cm} = 240 \text{ mm}$$

$$d = 4 \text{ mm}$$

$$a_n = 2000 \text{ mm}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$2000 = 240 + (n-1) \cdot 4$$

$$1760 = 4n - 4$$

$$n = \frac{1764}{4} = 441$$

Výsledek: A, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Růst počtu bakterií byl za stálých podmínek exponenciální.

Za každých 24 hodin vzrostl počet bakterií 64krát.

23 Za jak dlouho vzrostl počet bakterií 4krát?

A) za 1,5 hodiny

B) za 4 hodiny

C) za 6 hodin

D) za 8 hodin

E) za jinou dobu

Řešení

Viz <https://www.statnimaturita-matika.cz/reseni-testu-2025-jaro>

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2024

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Nová sociální síť měla na konci prvního měsíce svého fungování 6 000 uživatelů. Každý další měsíc se počet uživatelů této sociální sítě zvýšil o polovinu oproti předchozímu měsíci.

11 Jaký byl počet uživatelů na konci 4. měsíce fungování této sociální sítě?

Řešení

$$a_1 = 6000$$

$$q = 1,5$$

$$a_4 = 6000 \cdot 1,5^3 = 20250$$

Výsledek: Počet uživatelů na konci 4. měsíce fungování této sociální sítě byl 20 250. 2 body

15 Pro $n \in N$ je dána posloupnost vzorcem pro n -tý člen:

$$a_n = \frac{82 - 6n}{5}$$

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

15.1 První tři členy dané posloupnosti jsou $a_1 = 15,2$; $a_2 = 14$; $a_3 = 12,8$

15.2 Pro danou posloupnost platí $a_{n+10} - a_n = 12$

15.3 Součet prvních 25 členů dané posloupnosti je 20 ($s_{25} = 20$)

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

15.1

$$a_1 = \frac{82 - 6 \cdot 1}{5} = 15,2$$

$$a_2 = \frac{82 - 6 \cdot 2}{5} = 14$$

$$a_3 = \frac{82 - 6 \cdot 3}{5} = 12,8$$

A

15.2

$$a_{n+10} - a_n = \frac{82 - 6 \cdot (n+10)}{5} - \frac{82 - 6n}{5} = \frac{82 - 6n - 60}{5} - \frac{82 - 6n}{5} = \frac{82 - 6n - 60 - 82 + 6n}{5} = -12$$

N

15.3

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_{25} = a_1 + (25-1) \cdot d = 15,2 + 24 \cdot (-1,2) = -13,6$$

$$s_{25} = \frac{25}{2} \cdot (15,2 + (-13,6)) = 20$$

A

Výsledek: A N A, max. 3 body

Jaro 2024**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2**

Prodejce mobil zlevnil o 30 %, poté se začal mobil prodávat lépe. Prodejce zareagoval tak, že ho postupně dvakrát zdražil. První zdražení bylo o 20 % ze zlevněné ceny a pak ještě o 10 % z ceny po prvním zdražení. Výsledná cena po všech změnách je 11 088 Kč.

2 Vypočtete původní cenu mobilu.

Řešení

$$x \cdot 0,7 \cdot 1,2 \cdot 1,1 = 11088$$

$$x = \frac{11088}{0,7 \cdot 1,2 \cdot 1,1} = 12000$$

Výsledek: 12 000 Kč, 2 body

15 V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je znám její pátý člen $a_5 = 4$ a desátý člen $a_{10} = 972$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

15.1 Kvocient posloupnosti je roven 2.

15.2 Součet prvních tří členů posloupnosti je $\frac{52}{81}$.

15.3 Pro danou posloupnost platí $a_8 - a_5 = 27$.

Řešení

15.1

$$a_5 = 4, a_{10} = 972$$

Použijeme vzorec: $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

$$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$$

$$972 = 4 \cdot q^5 \quad / :4$$

$$\frac{972}{4} = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{243} = 3$$

N

15.2

$$a_5 = 4$$

$$a_1 \cdot q^4 = 4$$

$$a_1 = \frac{4}{3^4} = \frac{4}{81}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = \frac{4}{81} \cdot 3 = \frac{4}{27}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = \frac{4}{27} \cdot 3 = \frac{4}{9}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{4}{81} + \frac{4}{27} + \frac{4}{9} = \frac{52}{81}$$

A

15.3

$$a_8 = \frac{a_{10}}{q^2} = \frac{972}{9} = 108$$

$$a_5 = 4$$

$$a_8 - a_5 = 108 - 4 = 104$$

N

Výsledek: N A N, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 25

Je dána konečná posloupnost krychlí. První krychle má délku hrany $a_1 = 6\text{ cm}$. Hrana každé další krychle je o 2 cm delší než hrana předchozí krychle.

25 Ke každé podúloze (25.1–25.2) přiřaďte správný výsledek (A–F).

25.1 Kolikátá krychle bude mít hranu o délce 68 cm?

25.2 Kolikrát je objem 24. krychle větší než objem 11. krychle?

A) 32 B) 31 C) 8 D) 4 E) 2

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

$$a_1 = 6$$

$$d = 2$$

25.1

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$68 = 6 + (n-1) \cdot 2$$

$$62 = 2n - 2$$

$$n = 32$$

25.2

$$a_{24} = 6 + 23 \cdot 2 = 52$$

$$a_{11} = 6 + 10 \cdot 2 = 26$$

$$V_{24} = a^3 = 52^3 = 140\,608$$

$$V_{11} = 26^3 = 17\,576$$

$$\frac{V_{24}}{V_{11}} = \frac{140\,608}{17\,576} = 8$$

Výsledek: A, C, max. 4 body

Podzim 2023

9 V rostoucí aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je pátý člen $a_5 = 0$.

Vypočtete, kolikrát je dvacátý člen a_{20} větší než desátý a_{10} .

Řešení

Použijeme vzorec $a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$$a_{20} = a_5 + (20 - 5) \cdot d = 0 + 15d = 15d$$

$$a_{10} = a_5 + (10 - 5) \cdot d = 0 + 5d = 5d$$

$$\frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{15d}{5d} = 3$$

Výsledek: třikrát větší, 1 bod

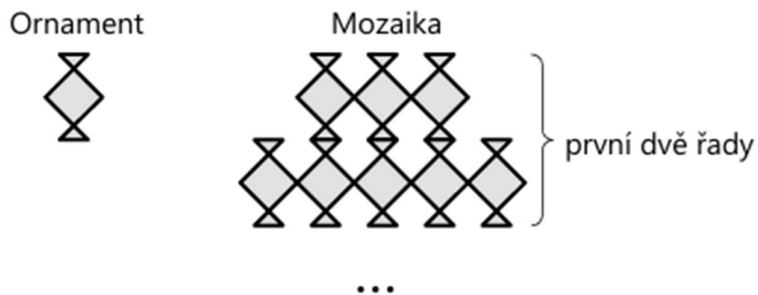
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Mozaika je tvořena řadami stejných ornamentů.

První řada mozaiky obsahuje 3 ornamenty.

Každá další řada obsahuje o 2 ornamenty více než předchozí řada.

Poslední řada mozaiky obsahuje 99krát více ornamentů než první řada.



21 Kolik ornamentů obsahuje celá mozaika?

- A) 15 000 B) 22 200 C) 29 700 D) 30 000 E) jiný počet

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

$$a_1 = 3$$

$$d = 2$$

$$a_n = 3 \cdot 99 = 297$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$297 = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$n = 148$$

$$s_{148} = \frac{148}{2} \cdot (3 + 297) = 22\,200$$

Výsledek: B, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

První dva členy aritmetické posloupnosti jsou zároveň prvními dvěma členy geometrické posloupnosti. Přitom první člen je o 8 menší než druhý a druhý člen je pětikrát větší než první.

22 Kolikátý člen aritmetické posloupnosti je roven třetímu členu geometrické posloupnosti?

A) žádný člen B) pátý člen C) šestý člen D) sedmý člen E) osmý člen

Řešení

1. člen x

2. člen y

$$x + 8 = y$$

$$y = 5x$$

$$x + 8 = 5x$$

$$x = 2$$

$$y = 10$$

$$a_1 + (n-1) \cdot d = a_1 \cdot q^2$$

$$2 + (n-1) \cdot 8 = 2 \cdot 5^2$$

$$2 + 8n - 8 = 50$$

$$n = 7$$

Výsledek: D, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Ve městě se postupně ruší poštovní schránky a nové se nezřizují.

Počet poštovních schránek na konci každého kalendářního roku je vždy nižší alespoň o 12 %, ale nejvýše o 14 % počtu poštovních schránek, které byly ve městě na počátku téhož roku.

Na konci roku 2021 (tj. na počátku roku 2022) bylo ve městě 38 poštovních schránek.

23 Kolik poštovních schránek se ve městě zrušilo během dvouletého období 2021 až 2022?

A) Nelze jednoznačně určit B) právě 9 C) právě 10 D) právě 11 E) právě 12

Řešení

Viz <https://www.statnimaturita-matika.cz/reseni-testu-2023-podzim>

Výsledek: D, 2 body

Jaro 2023

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

Dvě různé mozaiky jsou sestaveny z několika řad shodných šestiúhelníků.



- 25.1 První mozaika obsahuje 10 řad. Nejvíce šestiúhelníků je v horní řadě.
V každé další řadě je o polovinu méně šestiúhelníků než v řadě nad ní.
Ve třetí řadě zdola je 36 šestiúhelníků.
- 25.2 Druhá mozaika obsahuje lichý počet řad. Nejvíce šestiúhelníků je v horní řadě.
V každé další řadě je o 15 šestiúhelníků méně než v řadě nad ní.
Nejméně šestiúhelníků je tedy ve spodní řadě.
V prostřední řadě je 260 šestiúhelníků a ve spodní řadě 140 šestiúhelníků.

25 Ke každé otázce (25.1–25.2) přiřaďte správnou odpověď (A–F).

25.1 Kolik šestiúhelníků je v horní řadě první mozaiky?

25.2 Kolik šestiúhelníků dohromady obsahuje druhá mozaika?

A) méně než 4 000 B) 4 096 C) 4 420 D) 4 608 E) 4 680 F) více než 4 700

Řešení

25.1

Jedná se o geometrickou posloupnost.

Jednodušší je brát řady odzdoła:

$$a_3 = 36$$

$$q = 2$$

$$n = 10$$

Použijeme vzorec z tabulek:

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$a_{10} = a_3 \cdot q^{10-3}$$

$$a_{10} = 36 \cdot 2^7 = 4\,608$$

25.2

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

Jednodušší je brát řady odzdoła, spočítáme kolikátá řada je prostřední, tj. obsahuje 260 šestiúhelníků.

$$d = 15$$

$$a_n = 260$$

$$a_1 = 140$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$260 = 140 + (n-1) \cdot 15$$

$$120 = 15n - 15$$

$$n = 9$$

Prostřední řada je devátá $\Rightarrow$ řad je celkem 17.

$$a_{17} = a_1 + 16d = 140 + 16 \cdot 15 = 380$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

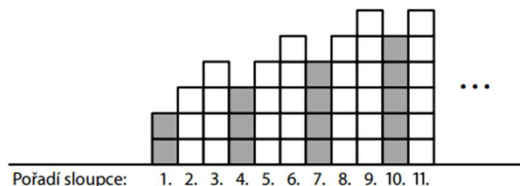
$$s_{17} = \frac{17}{2}(140 + 380) = 4\,420$$

Výsledek: D, C, max. 4 body

Podzim 2022

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Obrazec obsahuje 1000 sloupců vytvořených ze stejně velkých čtverců. Pravidelně se v něm střídají jeden tmavý sloupec a dva bílé. Poslední sloupec je tmavý. První sloupec je vytvořen ze 2 tmavých čtverců, další dva sloupce jsou ze 3 a 4 bílých čtverců. Každá další trojice sloupců pak začíná tmavým sloupcem, který obsahuje o 1 čtverec méně než předchozí sloupec. Následují dva bílé sloupce, každý o 1 čtverec vyšší než předchozí.



9 Určete,

9.1 kolik čtverců obsahuje poslední sloupec obrazce,

9.2 kolik **tmavých** čtverců obsahuje celý obrazec.

Řešení

Obrazec obsahuje opakující se trojice sloupců, vždy jeden tmavý a následují dva bílé, těchto trojic je celkem 333, poslední tisící sloupec je tmavý.

Tmavých sloupců je tedy $333 + 1 = 334$. Tmavé sloupce tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 2, d = 1$.

9.1

$$a_{334} = a_1 + 333 \cdot d = 2 + 333 \cdot 1 = 335$$

9.2

$$s_{334} = \frac{334}{2}(2 + 335) = 56\,279$$

Výsledek: 9.1 Počet čtverců v posledním (tmavém) sloupci: 335,

9.2 Počet všech tmavých čtverců v obrazci: 56 279, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXTY K ÚLOHÁM 15.1–15.3

15.1 Boty byly v únoru o 50 % levnější než v lednu a v březnu se jejich cena zvýšila na 150 % únorové ceny.

15.2 Původní cena jablek se snížila nejprve o 20 % a poté o 25 % již snížené ceny.

15.3 Obchodník prodal 40 % švestek za plnou cenu a zbývajících švestky s 25% slevou.

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N)

15.1 Ceny bot v lednu a březnu byly stejné.

15.2 Po obou slevách tvořila cena jablek 60 % původní ceny.

15.3 Obchodník utržil za švestky tolik, jako by je všechny prodal s 15% slevou.

Řešení

15.1

$$x \cdot 0,5 \cdot 1,5 = 0,75x$$

Březnová cena byla 75% lednové ceny, ceny bot tedy nebyly stejné.

N

15.2

$$x \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 0,6x$$

Po obou slevách tvořila cena jablek 60 % původní ceny.

A

15.3

x počet švestek

y prodejní cena

$$0,4x \cdot y + 0,6x \cdot 0,75y = q \cdot x \cdot y$$

$$0,85 \cdot x \cdot y = q \cdot x \cdot y$$

$$q = 0,85$$

Cena prodaných švestek byla 85% ceny bez slevy, tj. jako by je všechny prodal s 15% slevou.

Příklad na procenta jde počítat i tak, že si zvolíme například

počet švestek 100 ks

prodejní cena 10 Kč

se slevami utržil:

$$40 \cdot 10 + 60 \cdot 7,5 = 850 \text{ Kč}$$

bez slev by utržil

$$100 \cdot 10 = 1000 \text{ Kč}$$

Sleva tedy byla 150 Kč

150 Kč z 1 000 Kč je 15%.

A

Výsledek: N A A, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro každé $n \in N$ platí $a_n = 7$.

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je první člen $b_1 = -8$ a pro každé $n \in N$ platí $b_{n+1} = b_n + 3$.

20 O kolik se liší součet prvních 10 členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

a součet prvních 10 členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

A) o 6 B) o 12 C) o 15 D) o 18 E) o jiný počet

Řešení

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, všechny členy jsou rovny 7, proto $s_{10} = 10 \cdot 7 = 70$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická s prvním členem -8 a diferencí 3.

$$a_{10} = a_1 + 9d = -8 + 9 \cdot 3 = 19$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(-8 + 19) = 55$$

$$70 - 55 = 15$$

Výsledek: C, 2 body

Jaro 2022

12 V aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 15$ je šedesátý člen $a_{60} = 340$.

Určete

12.1 první člen a_1 ,

12.2 pořadí k nejmenšího kladného členu posloupnosti ($a_k > 0$).

Řešení

12.1

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$340 = a_1 + (60-1) \cdot 15$$

$$a_1 = 340 - 59 \cdot 15 = -545$$

12.2

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$0 = -545 + (n-1) \cdot 15$$

$$545 = 15n - 15$$

$$n = 37,33$$

Posloupnost roste ze záporných čísel (protože $a_1 = -545$), 37. člen je ještě záporný, 38. člen je už kladný.

Výsledek: 12.1 $a_1 = -545$, 12.2 $k = 38$, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Robůtek se pohybuje po spirále. Nejkratší dobu stráví na prvním oblouku spirály. Časy strávené na dalších obloucích se postupně prodlužují. Rozdíl časů strávených na kterýchkoli dvou po sobě jdoucích obloucích je konstantní. První dva oblouky překoná robůtek za 32 sekund, samotný čtvrtý oblouk také za 32 sekund.

13 Vypočtete čas, který robůtek stráví na pátém oblouku.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Protože „**Rozdíl** časů strávených na kterýchkoli dvou po sobě jdoucích obloucích je konstantní“ => posloupnost je aritmetická.

$$a_1 + a_2 = 32$$

$$\underline{a_4 = 32}$$

$$a_1 + a_1 + d = 32$$

$$\underline{a_1 + 3d = 32}$$

$$2a_1 + d = 32$$

$$\underline{a_1 + 3d = 32 \quad / \cdot (-2)}$$

$$2a_1 + d = 32$$

$$\underline{-2a_1 - 6d = -64}$$

$$-5d = -32$$

$$d = 6,4$$

$$a_5 = a_4 + d = 32 + 6,4 = 38,4$$

Výsledek: Na pátém oblouku spirály stráví robůtek 38,4 sekundy, max. 2 body.

24 V **geometrické** posloupnosti je třetí člen $a_3 = 2$ a čtvrtý člen je o 3 menší než třetí člen.

Jaký je součet prvních tří členů uvedené geometrické posloupnosti ($a_1 + a_2 + a_3$)?

A) -3

B) 6

C) 15

D) 26

E) jiný součet

Řešení

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 2 - 3 = -1$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_3 : q = 2 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$a_1 = a_2 : q = -4 : \left(-\frac{1}{2}\right) = 8$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 8 + (-4) + 2 = 6$$

Výsledek: B, 2 body.

Podzim 2021

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Pan Kraus vložil do fondu počáteční kapitál. Vždy po uplynutí úrokovacího období v délce jednoho roku se aktuální kapitál pana Krause zvýšil o 5 %. Za 6 let tak byl jeho kapitál ve fondu celkem o 68 019 korun vyšší než počáteční kapitál.

10 Vypočítejte hodnotu počátečního kapitálu pana Krause. Výsledek zaokrouhlete na celé koruny.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

a_0 počáteční kapitál

$$q = 1,05$$

$$n = 6$$

$$a_n = a_0 + 68\,019$$

Pravidelný růst i pokles lze popsat rovnicí $a_n = a_0 \cdot q^n$

$$a_0 + 68019 = a_0 \cdot 1,05^6$$

$$68019 = a_0 \cdot 1,05^6 - a_0$$

$$68019 = a_0 \cdot (1,05^6 - 1)$$

$$a_0 = \frac{68019}{1,05^6 - 1} \doteq 200\,000$$

Výsledek: Počáteční kapitál pana Krause činil 200 000 korun, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Vytváříme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

První člen je v obou posloupnostech stejný: $a_1 = b_1 = 24$.

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **prvního** členu.

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **předchozího** členu.

20 Kolikrát větší je člen b_{33} než člen a_{33} ? (Výsledek je zaokrouhlen na jednotky.)

A) 25 379krát

B) 36 981krát

C) 258 864krát

D) 383 502krát

E) Obě čísla jsou stejná.

Řešení

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická

$$a_1 = 24$$

$$d = 12$$

$$a_{33} = 24 + 32 \cdot 12 = 408$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická

$$b_1 = 24$$

$$q = 1,5$$

$$b_{33} = 24 \cdot 1,5^{32} = 10\,354\,557,2$$

$$\frac{b_{33}}{a_{33}} = \frac{24 \cdot 1,5^{32}}{408} = 25\,379$$

Výsledek: A, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

Ota Rozmařilý v období trvajícím 100 dní utrácel následujícím způsobem:

Za první den utratil celkem 10 000 korun. Každý 5. den neutratil nic. Ve všech ostatních dnech utratil za den vždy o 100 korun méně než za den, kdy utrácel naposledy.

(Např. 3. den utratil 9 800 korun, 4. den 9 700 korun, 5. den 0 korun a 6. den 9 600 korun.).

21 Kolik korun utratil Ota Rozmařilý během 100 dní?

- A) 484 000 korun
- B) 560 000 korun
- C) 692 000 korun
- D) 2 240 000 korun
- E) jiný počet korun

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

Ze 100 dní každý 5. den nic neutratil $\Rightarrow$ utrácel pouze 80 dní.

$$a_1 = 10000$$

$$d = -100$$

$$a_{80} = a_1 + 79d = 10000 + 79 \cdot (-100) = 2100$$

$$s_{80} = \frac{80}{2}(10000 + 2100) = 484000$$

Výsledek: A, 2 body.

Mimořádný termín červenec 2021

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V kocourkovské firmě má na počátku každý pracovník stejnou základní hodinovou mzdu. Ke zvýšení hodinové mzdy může dojít během kariéry nejvýše 4krát. Po každém zvýšení je poměr zvýšené mzdy ku předchozí mzdě 3:2. Pan Kočka má po dvojím zvýšení hodinovou mzdu o 200 korun vyšší než na počátku.

13 Vypočtete, kolik korun činí v kocourkovské firmě

13.1 základní hodinová mzda,

13.2 nejvyšší možná hodinová mzda.

Řešení

13.1

Jedná se o pravidelný růst

a_0 základní hodinová mzda

$$q = 1,5$$

$a_2 = a_0 + 200$ hodinová mzda pana Kočky po dvojím zvýšení

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

$$a_0 + 200 = a_0 \cdot 1,5^2$$

$$200 = 2,25a_0 - a_0$$

$$200 = 1,25a_0$$

$$a_0 = \frac{200}{1,25} = 160$$

13.2

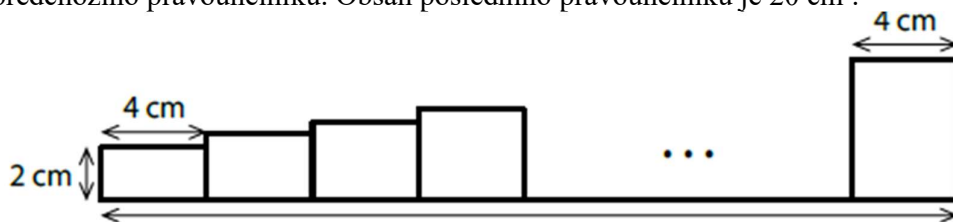
$$a_4 = 160 \cdot 1,5^4 = 810$$

Výsledek: 13.1 160 korun, 13.2 810 korun, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Rovinný obrazec se skládá z pravoúhelníků (obdélníků a jednoho čtverce).

První pravoúhelník je obdélník s rozměry 4 cm a 2 cm. První rozměr (4 cm) je stejný i u všech následujících pravoúhelníků, druhý rozměr (délka svislé strany) je u každého dalšího pravoúhelníku o 0,2 cm větší než u předchozího pravoúhelníku. Obsah posledního pravoúhelníku je 20 cm².



14 Vypočtete

14.1 pořadí pravoúhelníku, který je čtverec,

14.2 v cm délku x celého obrazce,

14.3 v cm² obsah celého obrazce.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý postup řešení.

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost.

$$a_1 = 2 \text{ cm}$$

$$d = 0,2 \text{ cm}$$

$$a_n = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm}$$

14.1

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$4 = 2 + (n-1) \cdot 0,2$$

$$2 = 0,2n - 0,2$$

$$n = 11$$

11. pravoúhelník je čtverec

14.2

Nejprve musíme určit celkový počet pravoúhelníků

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$5 = 2 + (n-1) \cdot 0,2$$

$$3 = 0,2n - 0,2$$

$$n = 16$$

$$16 \cdot 4 = 64 \text{ cm}$$

Délka celého obrazce je 64 cm.

14.3

$$S = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2,2 + 4 \cdot 2,4 + \dots + 4 \cdot 4,8 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot (2 + 2,2 + 2,4 + \dots + 4,8 + 5)$$

$$s_{16} = \frac{16}{2} (2 + 5) = 56$$

$$S = 4 \cdot 56 = 224 \text{ cm}^2$$

Obsah celého obrazce je 224 cm².

Výsledek: 14.1 11. pravoúhelník 1 bod, 14.2 $x = 64$ cm 1 bod, 14.3 224 cm² 1 bod.

Jaro 2021

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

V rizikové oblasti se počty nově nakažených osob evidují denně vždy v 18 hodin. V poslední době pozorujeme exponenciální růst šíření nákazy a zatím se nepředpokládá změna tohoto trendu. Tedy denní počty nově nakažených osob odpovídají po sobě jdoucím členům geometrické posloupnosti zaokrouhleným na celá čísla. V sobotu (tj. před 2 dny) bylo evidováno 729 nově nakažených osob, v pondělí (tj. dnes) 810 osob a v pátek tohoto týdne (tj. ode dneška za 4 dny) lze očekávat n nově nakažených osob.

21 Ve kterém intervalu leží n ?

A) (810; 980) B) (980; 1 030) C) (1 030; 1 080) D) (1 080; 1 230) E) (1 230; 2 460)

Řešení

Jedná se o geometrickou posloupnost

$$729 \cdot q \cdot q = 810$$

$$q = \sqrt{\frac{810}{729}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$n = 810 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 810 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^4 = 1000$$

Výsledek: B, 2 body.

22 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_3 = 8$$

$$a_5 = a_3 + a_4$$

Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

A) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

B) $a_2 + a_3 = 8$

C) $a_1 + a_3 = a_2$

D) $a_2 + a_4 = a_3$

E) $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$

Řešení

$$a_3 = 8$$

$$\underline{a_5 = a_3 + a_4}$$

$$a_1 + 2d = 8$$

$$\underline{a_1 + 4d = a_1 + 2d + a_1 + 2d}$$

$$a_1 + 2d = 8$$

$$\underline{-a_1 - d = 0}$$

$$d = 8$$

$$a_1 = 8 - 2d = 8 - 2 \cdot 8 = -8$$

$$a_2 = -8 + 8 = 0$$

$$a_3 = 8$$

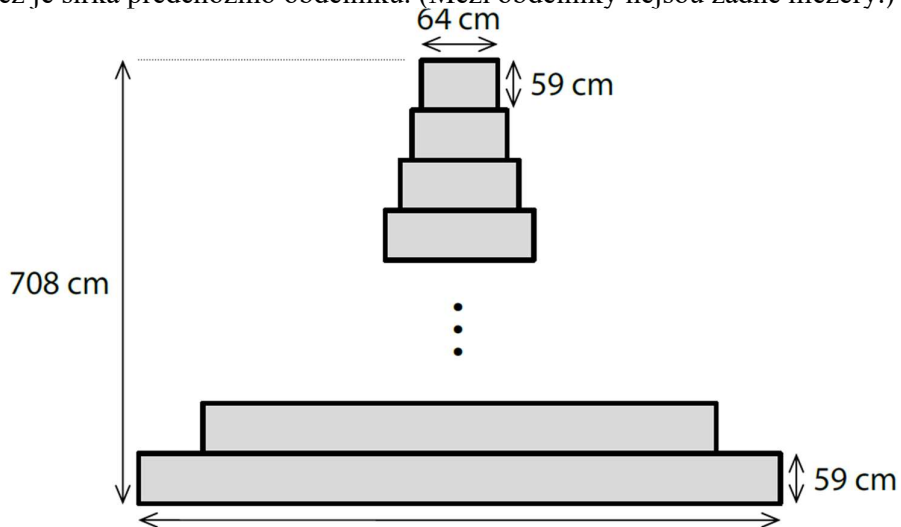
$$a_4 = 16$$

$$a_5 = 24$$

Výsledek: D, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

Na zeď haly je promítnut obrazec vysoký 708 cm. Obrazec je složen z obdélníků, první obdélník shora má výšku 59 cm a šířku 64 cm. Každý další obdélník má rovněž výšku 59 cm, ale šířku má vždy o čtvrtinu větší, než je šířka předchozího obdélníku. (Mezi obdélníky nejsou žádné mezery.)



23 Jaká je šířka s posledního obdélníku? Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

- A) 745 cm
- B) 768 cm
- C) 809 cm
- D) 931 cm
- E) jiná šířka

Řešení

Jedná se o geometrickou posloupnost:

$$a_1 = 64 \text{ cm}$$

$$q = 1,25$$

$$n = \frac{708}{59} = 12$$

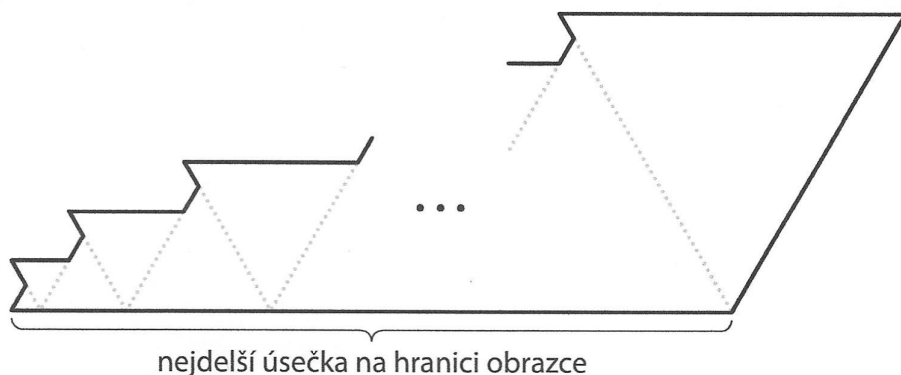
$$a_{12} = 64 \cdot 1,25^{11} = 745 \text{ cm}$$

Výsledek: A, 2 body.

Podzim 2020

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Zakreslený obrazec se skládá z 50 rovnostranných trojúhelníků. První z těchto trojúhelníků má stranu délky 1 cm. Každý další trojúhelník má stranu o 1 cm delší než předchozí trojúhelník.



Nejdelší úsečka na hranici obrazce se skládá z vodorovných stran všech trojúhelníků s lichým pořadím (1., 3., 5. atd.). Každý trojúhelník se sudým pořadím má na této úsečce jeden vrchol.

12 Vypočtěte v cm

12.1 délku nejdelší úsečky na hranici obrazce,

12.2 obvod obrazce.

Řešení

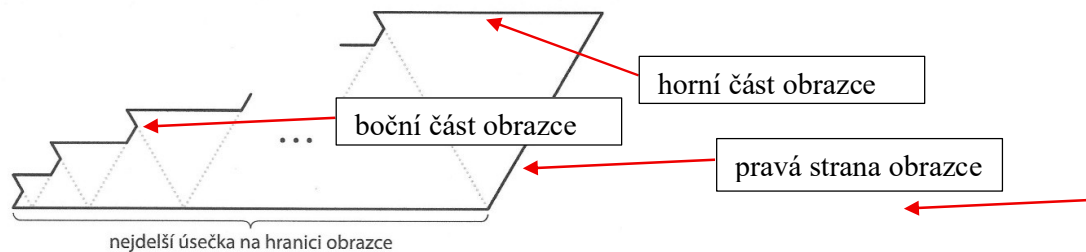
12.1

Jedná se o aritmetickou posloupnost, $a_1 = 1, d = 2, n = 25$ (protože obsahuje pouze liché členy)

$$a_{25} = a_1 + 24d = 1 + 24 \cdot 2 = 49$$

$$s_{25} = \frac{25}{2}(1 + 49) = 625$$

12.2



Dolní část obrazce má délku 625 cm.

Horní část obrazce: jedná se o aritmetickou posloupnost, $a_1 = 2, d = 2, n = 25$ (protože obsahuje pouze sudé členy)

$$a_{25} = a_1 + 24d = 2 + 24 \cdot 2 = 50$$

$$s_{25} = \frac{25}{2}(2 + 50) = 650$$

Horní část obrazce má délku 650 cm.

Boční část obrazce se skládá z 25 lomených čar, každá má délku 2 cm

Boční část obrazce má délku 50 cm

Pravá strana obrazce má délku 50 cm.

$$625 + 650 + 50 + 50 = 1375 \text{ cm}$$

Výsledek: 12.1 625 cm 1 bod, 12.2 1375 cm 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V Kocourkově si klient založil účet a vložil na něj 2 000 zlatáků. Po uplynutí každého roku se aktuální částka na jeho účtu mávnutím proutku zvětší o polovinu. Klient na účet žádné další peníze nevkládá, ani je z účtu nevybírá.

13 Vypočtete,

13.1 kolik zlatáků bude mít klient na účtu po dvou letech od jeho založení,

13.2 po kolika letech od založení účtu bude mít klient poprvé na účtu přes 1 milion zlatáků.

Řešení

Jedná se o pravidelný růst

13.1

$$a_0 = 2000$$

$$q = 1,5$$

$$a_2 = 2000 \cdot 1,5^2 = 4500$$

13.2

$$a_0 = 2000$$

$$q = 1,5$$

$$1000000 = 2000 \cdot 1,5^n$$

$$500 = 1,5^n$$

$$n = \frac{\log 500}{\log 1,5} \doteq 15,3$$

Výsledek: 13.1 4 500 zlatáků 1 bod; 13.2 po 16 letech 1 bod
