

Stereometrie

Podzim 2025

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Kulový vrchlík má obsah $20\pi \text{ cm}^2$ a tvoří 20 % povrchu celé koule.

13 Určete v cm poloměr koule.

Řešení

Povrch koule: $S = 4\pi r^2$

$$20\pi = 0,2 \cdot 4\pi r^2 \quad / : 0,8\pi$$

$$r^2 = \frac{20\pi}{0,8\pi} = 25$$

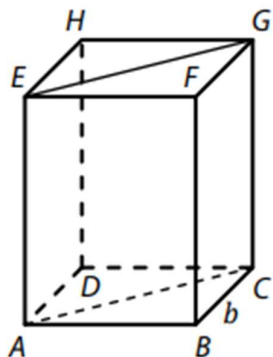
$$r = 5 \text{ cm}$$

Výsledek: $r = 5 \text{ cm}$, 1 bod.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

Úhlopříčným řezem kvádru ABCDEFGH je čtverec ACGE o obsahu 841 cm^2 .

Délka hrany BC kvádru je $b = 21 \text{ cm}$.



25 Přiřaďte ke každé stěně kvádru (25.1–25.2) její obsah (A–F).

25.1 BCGF _____

25.2 ABCD _____

A) menší než 441 cm^2 B) 441 cm^2 C) 580 cm^2 D) 609 cm^2 E) 735 cm^2 F) větší než 735 cm^2

Řešení

25.1

Obsah čtverce ACGE: $S = a^2$

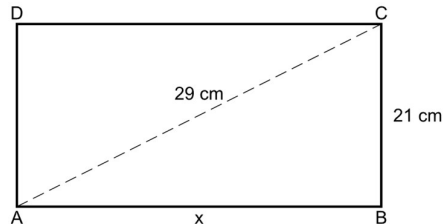
Strana čtverce: $a = \sqrt{S} = \sqrt{841} = 29 \text{ cm}$

$|AC| = |CG| = 29 \text{ cm}$

Obsah strany BCGF: $S = a \cdot b = 21 \cdot 29 = 609 \text{ cm}^2$

25.2

ABCD je obdélník, známe velikost strany BC a velikost úhlopříčky AC, musíme určit velikost strany AB.



$x = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20 \text{ cm}$

$S = a \cdot b = 20 \cdot 21 = 420 \text{ cm}^2$

Výsledek: D,A, max. 4 body.

Jaro 2025

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Vnitřní prostor nádoby má tvar rotačního válce s podstavou o průměru 12 cm a výškou 16 cm. Hladina vody v nádobě je ve výšce 11 cm ode dna. Do nádoby vhodíme kovovou kuličku o poloměru 3 cm. Kulička klesne ke dnu a hladina vody v nádobě stoupne.

20 O kolik stoupne hladina vody v nádobě po vhození kuličky?

A) o 2,00 cm B) o 1,50 cm C) o 1,25 cm D) o 1,00 cm E) o 0,50 cm

Řešení

Přírůstek objemu vody ve válci je roven objemu vhozené kuličky.

$$\text{Objem kuličky: } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$$

Stoupnutí hladiny odpovídá zvýšenému objemu válce o objem vhozené kuličky.

$$V = \pi r^2 v$$

$$36\pi = \pi 6^2 \cdot v$$

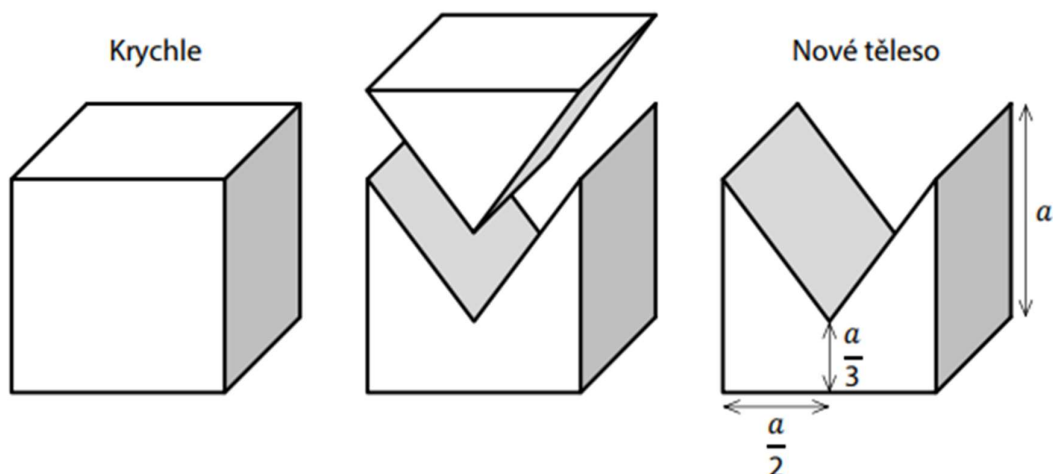
$$36\pi = 36\pi \cdot v \quad / : 36\pi$$

$$v = 1 \text{ cm}$$

Výsledek: D, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Z krychle s hranou délky a byl dvěma šikmými řezy oddělen trojboký hranol, a vzniklo tak nové těleso (viz obrázek).



21 Jaký je poměr povrchu krychle ku povrchu nového tělesa (v tomto pořadí)?

A) 1 : 1 B) 9 : 10 C) 6 : 7 D) 5 : 6 E) 3 : 5

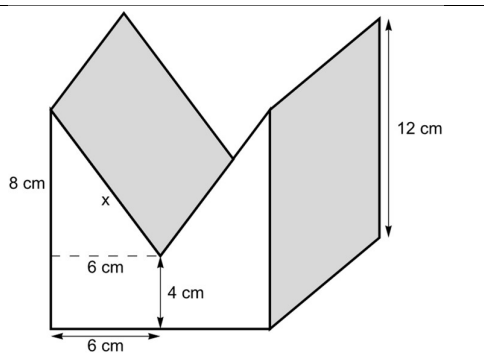
Řešení

Nejjednodušší postup je zvolit si za a vhodné číslo, např. $a = 12 \text{ cm}$.

Povrch krychle je: $S = 6a^2 = 6 \cdot 12^2 = 864 \text{ cm}^2$

Pro výpočet povrchu nového tělesa musíme nejprve spočítat x :

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$



Povrch nového tělesa se skládá z:

1) tří čtverců (podstava, levý čtverec, pravý čtverec) $S_1 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot 12^2 = 432 \text{ cm}^2$

2) čtyř lichoběžníků o základnách 12 cm a 4 cm a výšce 6 cm $S_2 = 4 \cdot \frac{a+c}{2} \cdot v = 4 \cdot \frac{12+4}{2} \cdot 6 = 192 \text{ cm}^2$

3) dvou obdélníků o stranách 10 cm a 12 cm $S_3 = 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$

Povrch nového tělesa $S = S_1 + S_2 + S_3 = 432 + 192 + 240 = 864 \text{ cm}^2$

$$\frac{864}{864} = 1:1$$

Výsledek: A, 2 body.

Podzim 2024

3 Objem koule je $x \text{ dm}^3$ a povrch této koule je $y \text{ dm}^2$, přičemž $x = y$.

Určete poloměr koule.

Výsledek uveďte v dm.

Řešení

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \quad / :3$$

$$4\pi r^3 = 12\pi r^2 \quad / :4\pi r^2$$

$$r = 3 \text{ dm}$$

Výsledek: Koule má poloměr 3 dm, 1 bod.

Jaro 2024

- 14 Na kostele má být zhotovena plechová stříška, která má tvar pláště rotačního kužele. Průměr podstavy kužele, jehož plášť tvoří stříšku, je 5 metrů a výška kužele je 180 centimetrů. Při výrobě stříšky se spotřebuje o 10 % materiálu navíc.

Kolik m² plechu je třeba na zhotovení stříšky?

Zaokrouhlete výsledek na desetiny v m².

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Nejprve musíme určit stranu rotačního kužele:

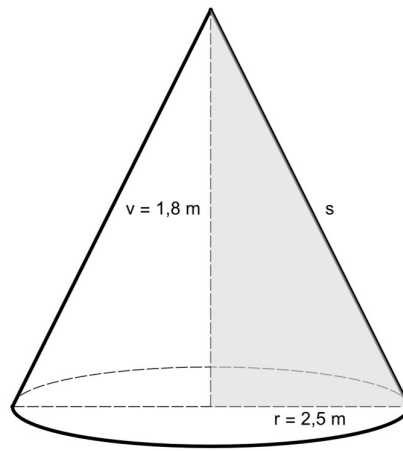
$$s = \sqrt{2,5^2 + 1,8^2} = 3,08 \text{ m}$$

Vypočteme plochu pláště kužele:

$$S = \pi r s = \pi \cdot 2,5 \cdot 3,08 = 24,18 \text{ m}^2$$

Na výrobu je potřeba 10% navíc:

$$1,1 \cdot 24,18 = 26,6 \text{ m}^2$$

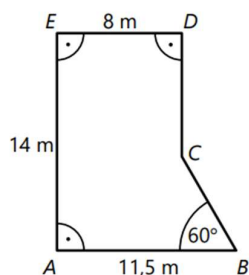


Výsledek: 26,6 m², max. 3 body.

Podzim 2023

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Stavba má tvar pětibokého kolmého hranolu s výškou 5 metrů. Na obrázku je zakreslena podstava ABCDE. tohoto hranolu.



13 Vypočtete

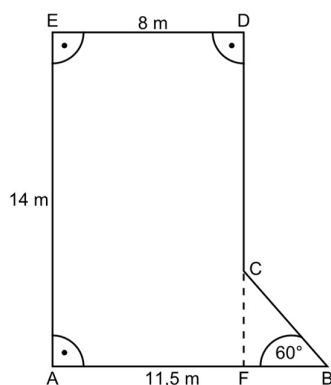
Výsledky zaokrouhlete na celá čísla, dílčí výpočty nezaokrouhľujte.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.

13.1 v m^2 obsah boční stěny hranolu, která obsahuje podstavnou hranu BC,

13.2 v m^3 objem hranolu.

Řešení



13.1

$$|FB| = 11,5 - 8 = 3,5 \text{ m}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{3,5}{|BC|} \quad / \cdot |BC|$$

$$|BC| \cdot \cos 60^\circ = 3,5$$

$$|BC| = \frac{3,5}{\cos 60^\circ} = 7 \text{ m}$$

Obsah boční stěny hranolu, která obsahuje podstavnou hranu BC $S = |BC| \cdot v = 7 \cdot 5 = 35 \text{ m}^2$

13.2

Obsah podstavy je roven součtu obsahu trojúhelníku FBC a obdélníku AFDE

$$\text{Trojúhelník FBC: } S_1 = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$$

$$\text{Obdélník AFDE: } S_2 = a \cdot b = 8 \cdot 14 = 112 \text{ m}^2$$

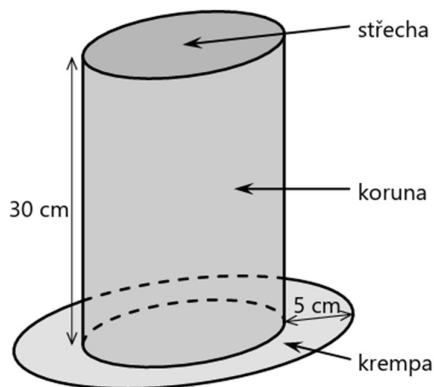
$$\text{Obsah podstavy } S_p = S_1 + S_2 = \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{8} + 112$$

$$\text{Objem hranolu } V = S_p \cdot v = \left(\frac{49\sqrt{3}}{8} + 112 \right) \cdot 5 \doteq 613 \text{ m}^3$$

Výsledek: 13.1 $S = 35 \text{ m}^2$, 13.2 $V \doteq 613 \text{ m}^3$, max. 4 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Papírový klobouk se skládá ze tří částí – střechy, koruny a krempy. Střechu tvoří kruh, který je horní podstavou rotačního válce. Koruna je pláštěm tohoto válce a jejím rozvinutím by vznikl obdélník o rozměrech 60 cm a 30 cm, druhý rozměr je výškou válce. Krempa má tvar mezikruží o šířce 5 cm. Klobouk byl vyroben z papíru, který je z jedné strany modrý a z druhé bílý. Jednotlivé části klobouku k sobě přiléhají svými okraji a jsou sešity nití.

**19 Jaký je obsah všech modrých ploch klobouku?**

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2 .

- A) 2 086 cm^2 B) 2 465 cm^2 C) 4 472 cm^2 D) 4 851 cm^2 E) jiný obsah

Řešení

Plášť válce (koruna) má obsah $S_1 = 60 \cdot 30 = 1800 \text{ cm}^2$

Výpočet poloměru střechy

$$S = 2\pi r v$$

$$r = \frac{S}{2\pi v} = \frac{1800}{2 \cdot \pi \cdot 30} = 9,55 \text{ cm}$$

Obsah střechy

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 9,55^2 = 286,4 \text{ cm}^2$$

Poloměr krempy $r_1 = 9,55 + 5 = 14,55 \text{ cm}$

$$\text{Obsah krempy } S = \pi r_1^2 - \pi r^2 = 3,14 \cdot 14,55^2 - 286,4 = 378,3 \text{ cm}^2$$

$$\text{Obsah všech modrých ploch } S = 286,4 + 1800 + 378,3 \doteq 2465 \text{ cm}^2$$

Výsledek: B, 2 body.

Jaro 2023**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18**

Vnitřní prostor konvičky na mléko má tvar rotačního válce s podstavou o průměru 6 cm. Vnitřní prostor kalíšku, který je zcela zaplněn mlékem do kávy, má tvar rotačního válce s podstavou o průměru 2,4 cm a výškou 1,5 cm. Všechno mléko z kalíšku jsme přilili do konvičky s mlékem. (Konvička nebyla nakloněna, mléko nepřetéklo.)

18 O kolik stoupla hladina v konvičce po přilítí mléka z kalíšku?

A) o méně než 0,24 cm B) o 0,24 cm C) o 0,68 cm D) o 0,72 cm E) o více než 0,72 cm

Řešení

Objem kalíšku $V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 1,2^2 \cdot 1,5 = 2,16\pi \text{ cm}^3$

Stoupnutí hladiny odpovídá zvýšenému objemu válce o objem mléka z kalíšku.

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

$$2,16\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot v$$

$$v = \frac{2,16\pi}{9\pi} = 0,24 \text{ cm}^3$$

Výsledek: B, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Dřevěný rotační kužel s podstavou o poloměru 12 cm a výškou 16 cm jsme osovým řezem rozdělili na dva shodné půlkužele.



19 Jaký je povrch jednoho půlkužele?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2 .

- A) 603 cm^2 B) 720 cm^2 C) 795 cm^2 D) $1\,206 \text{ cm}^2$ E) jiný povrch

Řešení

Nejprve musíme spočítat stranu kužele

$$s = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$$

Povrch rotačního kužele

$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 12 \cdot 20 = 384\pi \text{ cm}^2$$

Polovina povrchu rotačního kužele

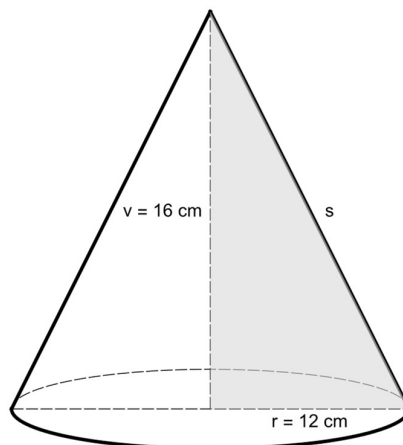
$$S = \frac{384\pi}{2} = 192\pi \text{ cm}^2$$

Musíme připočítat obsah rovnoramenného trojúhelníku se základnou 24 cm a výškou 16 cm

$$S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{24 \cdot 16}{2} = 192 \text{ cm}^2$$

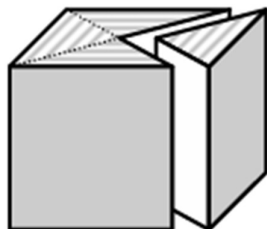
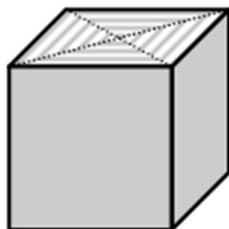
Povrch půlkužele $S = 192\pi + 192 \doteq 795 \text{ cm}^2$

Výsledek: C, 2 body.



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Z krychle s hranou délky 4 cm byl dvěma úhlopříčnými svislými řezy oddělen trojboký hranol, který tvoří čtvrtinu krychle. Oddělený hranol se přemístil tak, aby jeho čtvercová stěna splynula s protější stěnou krychle. Vzniklo tak nové těleso.



20 Jaký je povrch nového tělesa?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2 .

- A) 109 cm^2 B) 128 cm^2 C) 135 cm^2 D) 155 cm^2 E) jiný povrch

Řešení

Obsah horní a dolní podstavy zůstane stejný, tj. $S_1 = 2a^2 = 2 \cdot 4^2 = 32 \text{ cm}^2$

Přední a zadní stěna také zůstanou, tj. $S_2 = 2a^2 = 2 \cdot 4^2 = 32 \text{ cm}^2$

Nově přibudou čtyři obdélníky, kde jednou stranou bude výška krychle 4 cm a druhou polovina úhlopříčky čtverce se stranou 4 cm – tu musíme spočítat.

$$\text{Z MFCHT } u = a \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}; \frac{u}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

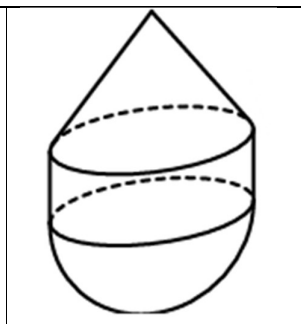
Nové čtyři obdélníky mají obsah $S_3 = 4 \cdot a \cdot b = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$

Povrch nového tělesa $S = S_1 + S_2 + S_3 = 32 + 32 + 32\sqrt{2} \doteq 109 \text{ cm}^2$

Výsledek: A, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

Těleso se skládá ze tří částí – rotačního kužele, rotačního válce a polokoule. Výška kužele je 4 cm a výška válce je 2 cm. Poloměr podstavy kužele, válce i polokoule je 3 cm. Podstavy sousedních částí splývají.



25 Ke každé otázce (25.1–25.2) přiřaďte správnou odpověď (A–F).

25.1 Jakou část objemu celého tělesa tvoří objem válce?

25.2 Jakou část povrchu celého tělesa tvoří obsah pláště kužele?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{8}$ F) jinou část

Řešení

25.1

$$\text{Objem rotačního kužele: } V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Objem válce: } V_2 = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Objem polokoule: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3; V_3 = \frac{1}{2} V = 18\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Objem celého tělesa: } V = V_1 + V_2 + V_3 = 12\pi + 18\pi + 18\pi = 48\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{18\pi}{48\pi} = \frac{3}{8}$$

25.2

$$\text{Strana pláště kužele } s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

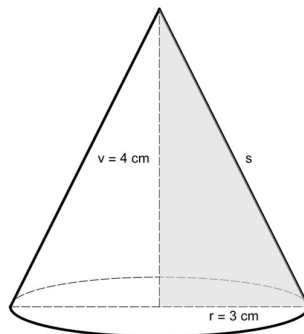
$$\text{Obsah pláště kužele: } S_1 = \pi r s = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Obsah pláště válce: } S_2 = 2\pi r v = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 = 12\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Povrch polokoule: } S_3 = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Povrch celého tělesa: } S = S_1 + S_2 + S_3 = 15\pi + 12\pi + 18\pi = 45\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Poměr: } \frac{15\pi}{45\pi} = \frac{1}{3}$$

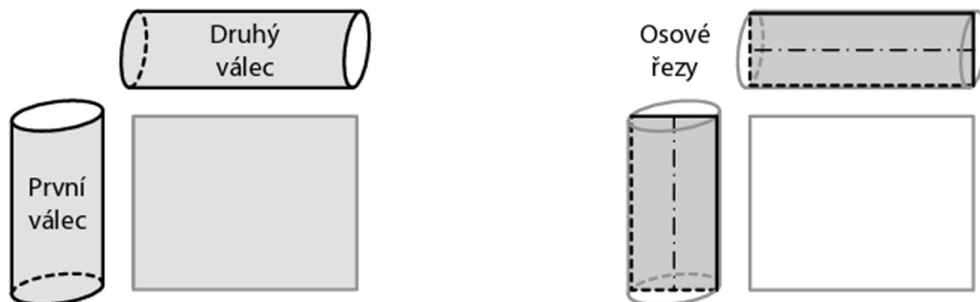


Výsledek: E, D, max. 4 body.

Jaro 2022

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOHÁM 19–20

Tentýž obdélník je rozvinutým pláštěm prvního i druhého rotačního válce. Délky sousedních stran obdélníku jsou v poměru 5:4. Výška prvního válce se shoduje s kratší stranou obdélníku, výška druhého válce s delší stranou obdélníku.



19 V jakém poměru je objem prvního válce ku objemu druhého válce?

- A) 1 : 1 B) 5 : 4 C) 25 : 16 D) 125 : 64 E) v jiném poměru

20 V jakém poměru je obsah osového řezu prvního válce ku obsahu osového řezu druhého válce?

- A) 1 : 1 B) $\sqrt{5} : 2$ C) 5 : 4 D) 25 : 16 E) v jiném poměru

Řešení

První válec $v = 4x$ Obvod podstavy $o = 5x$; $2\pi r = 5x \Rightarrow r = \frac{5x}{2\pi}$ Objem prvního válce: $V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot \left(\frac{5x}{2\pi}\right)^2 \cdot 4x = \pi \cdot \frac{25x^2}{4\pi^2} \cdot 4x = \frac{25x^3}{\pi}$ Druhý válec $v = 5x$ Obvod podstavy $o = 4x$; $2\pi r = 4x \Rightarrow r = \frac{4x}{2\pi} = \frac{2x}{\pi}$ Objem druhého válce: $V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 \cdot 5x = \pi \cdot \frac{4x^2}{\pi^2} \cdot 5x = \frac{20x^3}{\pi}$ Poměr $\frac{\frac{25x^3}{\pi}}{\frac{20x^3}{\pi}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 5 : 4$	
--	--

Obsah osového řezu prvního válce $S = d \cdot v = 2 \cdot \frac{5x}{2\pi} \cdot 4x = \frac{20x^2}{\pi}$

Obsah osového řezu druhého válce $S = d \cdot v = 2 \cdot \frac{2x}{\pi} \cdot 5x = \frac{20x^2}{\pi}$

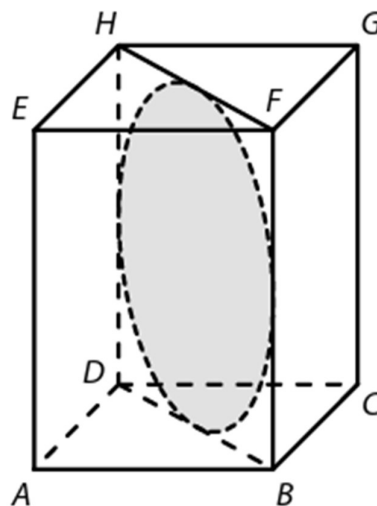
Poměr $\frac{\frac{20x^2}{\pi}}{\frac{20x^2}{\pi}} = 1 : 1$

Jednodušší postup je zvolit si $a = 5 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$

Výsledek: 19 B, 2 body, 20 A, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Úhlopříčnému řezu DBFH pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDEFGH je vepsán kruh o průměru 8 cm.



21 Jaký je objem hranolu ABCDEFGH?

- A) menší než 256 cm^3 B) 256 cm^3 C) 384 cm^3 D) 512 cm^3 E) větší než 512 cm^3

Řešení

Podstavou pravidelného čtyřbokého hranolu je čtverec, průměr kruhu 8 cm je roven velikosti úhlopříčky čtverce, stranu čtverce vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

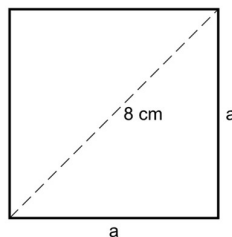
$$a^2 + a^2 = 8^2$$

$$2a^2 = 64$$

$$a = \sqrt{32} \text{ cm}$$

Výška hranolu je 8 cm

$$\text{Objem hranolu: } V = a^2 \cdot v = (\sqrt{32})^2 \cdot 8 = 256 \text{ cm}^3$$



Výsledek: B, 2 body.

Podzim 2021**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17**

Podstavou kolmého hranolu o objemu 544 cm^3 je kosočtverec. Obvod tohoto kosočtverce je 34 cm a výška kosočtverce je rovna výšce hranolu.

17 Jaký je povrch hranolu?

- A) 340 cm^2 B) 408 cm^2 C) 544 cm^2 D) 578 cm^2 E) jiný povrch

Řešení

$$\text{Strana kosočtverce } a = \frac{34}{4} = 8,5 \text{ cm}$$

Výšku kosočtverce spočítáme ze vzorce pro objem hranolu

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = a \cdot v \cdot v$$

$$V = a \cdot v^2$$

$$v^2 = \frac{V}{a} = \frac{544}{8,5} = 64$$

$$v = 8 \text{ cm}$$

Povrch hranolu

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$$

$$S_p = a \cdot v = 8,5 \cdot 8 = 68 \text{ cm}^2$$

$$S_{pl} = 4 \cdot a \cdot v = 4 \cdot 8,5 \cdot 8 = 272 \text{ cm}^2$$

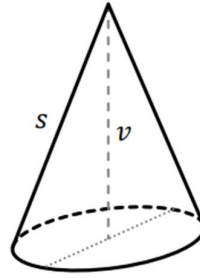
$$S = 2 \cdot 68 + 272 = 408 \text{ cm}^2$$

Výsledek: B, 2 body.

26 Přiřaďte ke každému rotačnímu tělesu (26.1–26.3) jeho objem (A–E).

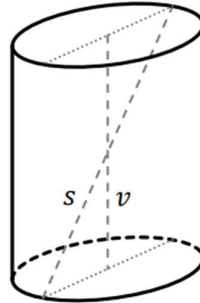
26.1 Výška rotačního kužele je $v = 9$ cm, strana tohoto kužele má délku $s = 11$ cm.

Jaký je objem rotačního kužele?

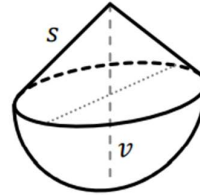


26.2 Výška rotačního válce je $v = 9$ cm, největší možná přímá vzdálenost dvou bodů tohoto válce je $s = 11$ cm.

Jaký je objem rotačního válce?



26.3 Rotační těleso je složeno z polokoule a rotačního kužele, jejichž podstavy splývají. Strana kužele má délku $s = 5\sqrt{2}$ cm. Výška v celého tělesa je shodná s průměrem polokoule. (Výška je průnik tělesa s jeho osou.)



Jaký je objem rotačního tělesa?

- A) menší než 96π cm³ B) 96π cm³ C) 100π cm³ D) 120π cm³ E) 125π cm³

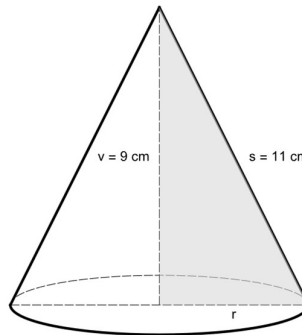
Řešení

26.1

$$r = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{10})^2 \cdot 9$$

$$V = 120\pi \text{ cm}^3$$



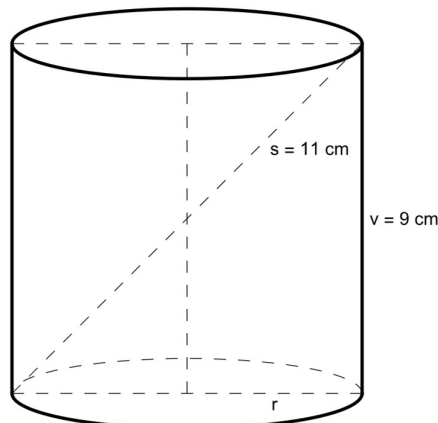
26.2

$$d = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$r = \frac{d}{2} = \sqrt{10} \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot (\sqrt{10})^2 \cdot 9$$

$$V = 90\pi \text{ cm}^3$$



26.3

Výška v celého tělesa je shodná s průměrem polokoule $\Rightarrow$ výška rotačního kužele je rovna poloměru polokoule.

$$r^2 + r^2 = s^2$$

$$2r^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Objem rotačního kužele

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = \frac{125\pi}{3}$$

Objem koule

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 125 = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$$

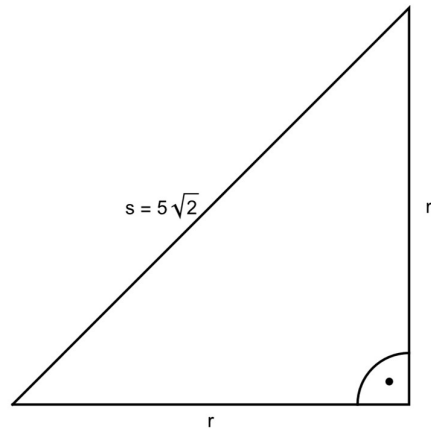
Objem polokoule

$$V = \frac{500}{6} \pi \text{ cm}^3$$

Objem celého tělesa

$$V = \frac{125\pi}{3} + \frac{500\pi}{6} = 125\pi \text{ cm}^3$$

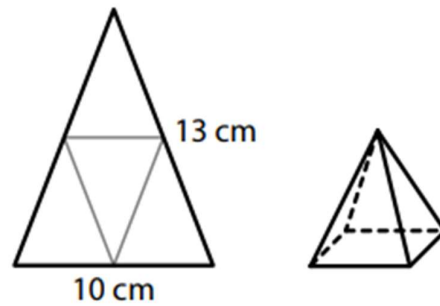
Výsledek: D A E, 3 body.



Mimořádný termín červenec 2021

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V rovnoramenném trojúhelníku mají ramena délku 13 cm a základna délku 10 cm. Trojúhelník podél středních příček rozstříháme na čtyři shodné menší trojúhelníky a vytvoříme z nich plášť pravidelného čtyřbokého jehlanu.



20 Jaký je povrch jehlanu (včetně podstavy)?

- A) 72 cm^2 B) 85 cm^2 C) 90 cm^2 D) 91 cm^2 E) jiný povrch

Řešení

Obsah pláště jehlanu je roven obsahu trojúhelníku.

Nejprve spočítáme výšku trojúhelníku:

$$v = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku = obsah pláště:

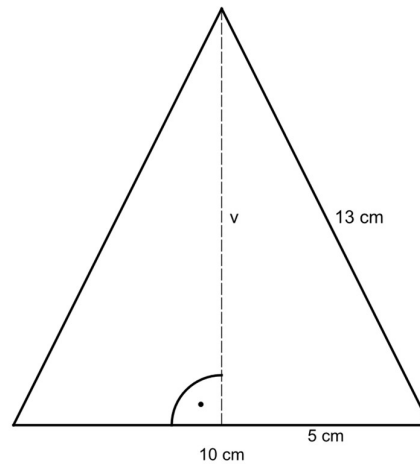
$$S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

Podstavou jehlanu je čtverec o straně 5 cm

$$S = a^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

Povrch jehlanu:

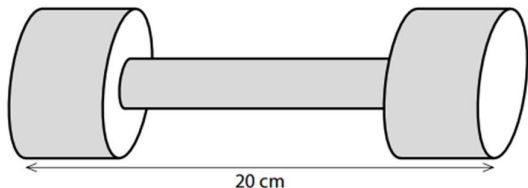
$$S = 60 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2 = 85 \text{ cm}^2$$



Výsledek: B, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 21–22

Kovová činka se skládá ze tří rotačních válců. Osy všech tří válců splývají. Dva shodné krajní válce mají průměr podstavy 6 cm a výšku 4 cm, prostřední válec má průměr podstavy 2 cm. Délka celé činky je 20 cm.



21 Jaký je objem činky?

- A) $84\pi \text{ cm}^3$ B) $92\pi \text{ cm}^3$ C) $184\pi \text{ cm}^3$ D) $192\pi \text{ cm}^3$ E) jiný objem

22 Jaký je povrch činky?

- A) menší než $88\pi \text{ cm}^2$ B) $88\pi \text{ cm}^2$ C) $106\pi \text{ cm}^2$ D) $108\pi \text{ cm}^2$ E) větší než $108\pi \text{ cm}^2$

Řešení

21

Krajní válce mají poloměr podstavy $r = 3 \text{ cm}$ a výšku $v = 4 \text{ cm}$

Objem jednoho krajního válce $V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3$

Prostřední válec má poloměr $r = 1 \text{ cm}$ a výšku $v = 20 - 4 - 4 = 12 \text{ cm}$

Objem prostředního válce: $V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 1^2 \cdot 12 = 12\pi \text{ cm}^3$

Objem celé činky: $V = 2 \cdot 36\pi + 12\pi = 84\pi \text{ cm}^3$

22

Od povrchu celého krajního válce S_1 musíme odečíst podstavu prostředního válce S_p

$$S_1 = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 42\pi \text{ cm}^2$$

$$S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$S = 42\pi - \pi = 41\pi \text{ cm}^2$$

Tyto válce jsou dva

$$2S = 2 \cdot 41\pi = 82\pi \text{ cm}^2$$

Z prostřední válce se započítá pouze plášť

$$S = 2\pi r v = 2\pi \cdot 1 \cdot 12 = 24\pi \text{ cm}^2$$

Povrch činky

$$S = 82\pi + 24\pi = 106\pi \text{ cm}^2$$

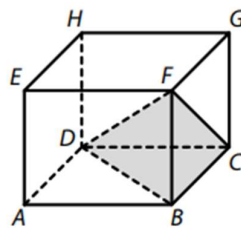
Výsledek: 21 A 2 body, 22 C 2 body.

Jaro 2021

25 Přiřaďte ke každé úloze (25.1–25.4) odpovídající výsledek (A–F).

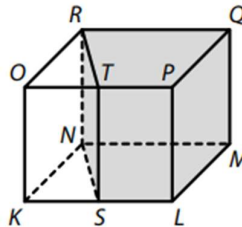
25.1 V kvádru ABCDEFGH je umístěn trojboký jehlan BCDF. Objem kvádru ABCDEFGH je 240 cm^3 .

Jaký je objem trojbokého jehlanu BCDF?



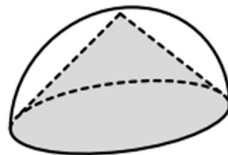
25.2 V kvádru KLMNOPQR je umístěn čtyřboký hranol SLMNTPQR. Body S, T jsou po řadě středy hran KL, OP. Objem čtyřbokého hranolu SLMNTPQR je 24 cm^3 .

Jaký je objem kvádru KLMNOPQR?



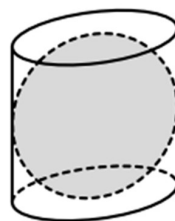
25.3 Do polokoule je vepsán rotační kužel (podstavy obou těles splývají, vrchol kužele leží na hranici polokoule). Objem rotačního kužele je 24 cm^3 .

Jaký je objem polokoule?



25.4 Do rovnostranného rotačního válce je vepsána koule (koule se dotýká pláště válce i obou podstav válce). Objem koule je 24 cm^3 .

Jaký je objem rotačního válce?



A) menší než 30 cm^3 B) 30 cm^3 C) 32 cm^3 D) 36 cm^3 E) 40 cm^3 F) větší než 40 cm^3

Řešení

25.1

Objem kvádru je $V = S_p \cdot v$, objem jehlanu se stejnou podstavou a výškou by byla $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$, tj.

$$\frac{1}{3} \cdot 240 = 80 \text{ cm}^3. \text{ Podstava je ale poloviční, proto } V = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}^3$$

25.2

$$V_H = 24 \text{ cm}^3 \quad \text{objem hranolu}$$

$$V_K \quad \text{objem kvádru}$$

Protože obsah podstavy hranolu je roven $\frac{3}{4}$ obsahu podstavy kvádru a výška obou těles je stejná, platí:

$$V_H = \frac{3}{4} V_K \quad / \cdot 4$$

$$4V_H = 3V_K \quad / : ,$$

$$V_K = \frac{4}{3} V_H = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32 \text{ cm}^3$$

25.3

V rotačním kuželi platí $r = v$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$24 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r / \cdot 3$$

$$72 = \pi r^3$$

$$r^3 = \frac{72}{\pi}$$

Objem polokoule

$$V = \frac{4}{6} \pi r^3 = \frac{4}{6} \pi \cdot \frac{72}{\pi} = 48 \text{ cm}^3$$

25.4

Z objemu koule vypočítáme poloměr

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$24 = \frac{4}{3} \pi r^3 / \cdot 3$$

$$72 = 4 \pi r^3$$

$$r^3 = \frac{72}{4 \pi}$$

Pro rotační válec platí: r je stejné jako u koule, $v = 2r$

Objem rotačního válce:

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

$$V = \pi r^2 \cdot 2r$$

$$V = 2 \pi r^3$$

$$V = 2 \pi \cdot \frac{72}{4 \pi}$$

$$V = 36 \text{ cm}^3$$

Výsledek: E C F D, max. 4 body.
