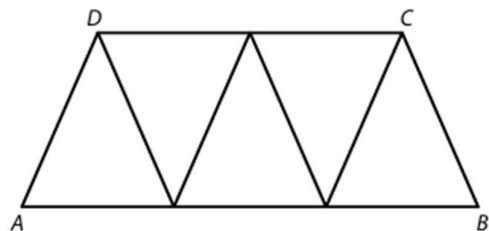


Planimetrie

Podzim 2025

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 19 – 20

Lichoběžník ABCD se skládá z pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků (viz obrázek). Lichoběžník ABCD má obsah 600 cm^2 a výšku 15 cm .



19 O kolik cm se liší délky obou základů lichoběžníku ABCD?

- A) o 16 cm
- B) o 12 cm
- C) o 10 cm
- D) o 8 cm
- E) o jinou délku

20 Jaký je obvod lichoběžníku ABCD?

- A) 71 cm
- B) 91 cm
- C) 105 cm
- D) 110 cm
- E) 114 cm

Řešení

U rovnoramenného trojúhelníku známe $S = \frac{600}{5} = 120 \text{ cm}^2$ a výšku $v = 15 \text{ cm}$. Určíme základnu a rameno:

$S = \frac{z \cdot v}{2} / 2$ $2S = z \cdot v$ $z = \frac{2S}{v} = \frac{2 \cdot 120}{15} = 16 \text{ cm}$		$r^2 = 8^2 + 15^2$ $r = \sqrt{289}$ $r = 17 \text{ cm}$
--	--	---

19

Dolní základna lichoběžníku je větší o velikost základny rovnoramenného trojúhelníku, tj. o 16 cm.

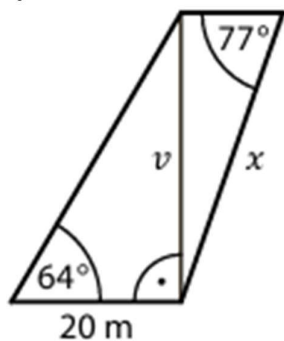
20

$$o = 3z + r + 2z + r = 3 \cdot 16 + 17 + 2 \cdot 16 + 17 = 114 \text{ cm}$$

Výsledek: 19 A, 2 body, 20 E, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Na obrázku je zahrada tvaru lichoběžníku, jehož delší základna měří 20 m, dva jeho vnitřní úhly jsou ostré a mají velikosti 64° a 77° .



21 Která z následujících rovností vyjadřuje délku ramene x v metrech?

A) $x = 20 \cdot \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\cos 77^\circ}$

B) $x = 20 \cdot \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\sin 77^\circ}$

C) $x = 20 \cdot \frac{\cos 64^\circ}{\sin 77^\circ}$

D) $x = 20 \cdot \operatorname{tg} 64^\circ \cdot \cos 77^\circ$

E) $x = 20 \cdot \cos 64^\circ \cdot \sin 77^\circ$

Řešení

Pro levý trojúhelník platí: $\operatorname{tg} 64^\circ = \frac{v}{20}$, pro pravý trojúhelník platí: $\sin 77^\circ = \frac{v}{x}$

$$\operatorname{tg} 64^\circ = \frac{v}{20} \quad \sin 77^\circ = \frac{v}{x}$$

$$v = \operatorname{tg} 64^\circ \cdot 20 \quad v = x \cdot \sin 77^\circ$$

$$\operatorname{tg} 64^\circ \cdot 20 = x \cdot \sin 77^\circ \quad / : \sin 77^\circ$$

$$x = \frac{\operatorname{tg} 64^\circ \cdot 20}{\sin 77^\circ} = 20 \cdot \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\sin 77^\circ}$$

Výsledek: 21 B, 2 body

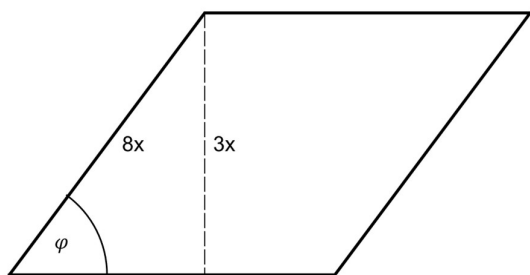
Jaro 2025

14 V kosočtverci je velikost výšky ku délce strany v poměru 3 : 8.

Vypočtete velikost φ ostrého vnitřního úhlu kosočtverce. Výsledek zaokrouhlete na celé stupně.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení



$$\sin \varphi = \frac{3x}{8x} = \frac{3}{8}$$

$$\varphi = 22^\circ$$

Výsledek: $\varphi = 22^\circ$ max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

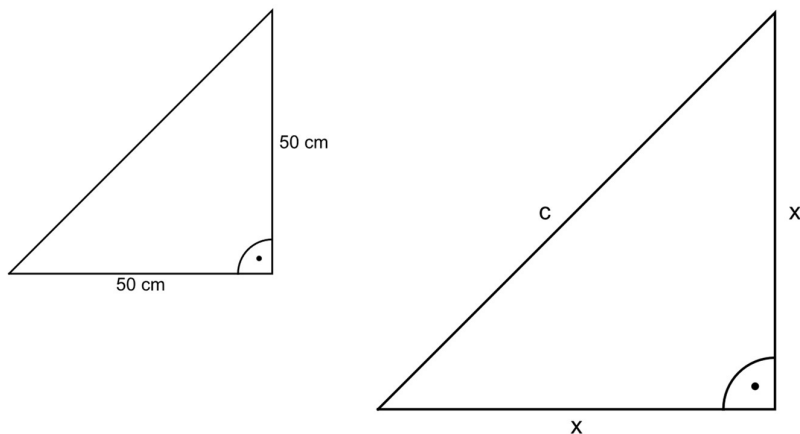
Trojčipé šátky mají tvar rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Kratší strana menšího šátku má délku 50 cm. Obsah většího šátku je o 125 % větší než obsah menšího šátku.

18 Jak dlouhá je delší strana většího šátku?

Výsledky jsou zaokrouhleny na celé cm.

- A) 63 cm
- B) 71 cm
- C) 88 cm
- D) 106 cm
- E) 159 cm

Řešení



$$\text{Obsah menšího šátku: } S_1 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{50 \cdot 50}{2} = 1250 \text{ cm}^2$$

$$\text{Obsah většího šátku: } S_2 = 1250 + 1,25 \cdot 1250 = 2812,5 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = \frac{x \cdot x}{2}$$

$$2812,5 = \frac{x^2}{2} / \cdot 2$$

$$x^2 = 5625$$

$$c^2 = x^2 + x^2$$

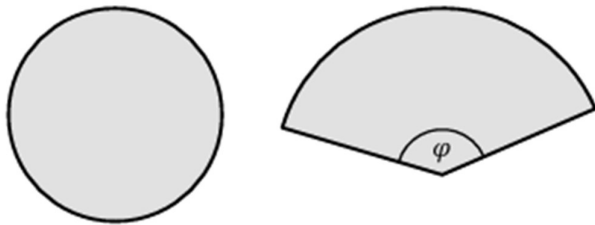
$$c^2 = 5625 + 5625$$

$$c = \sqrt{11250} = 75\sqrt{2} \doteq 106 \text{ cm}$$

Výsledek: D, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Kruh s poloměrem r má stejný obsah jako kruhová výseč se středovým úhlem φ a poloměrem $\frac{3}{2}r$.



19 Jakou velikost má úhel φ ?

- A) 120°
- B) 160°
- C) 200°
- D) 240°
- E) jinou velikost

Řešení

Obsah kruhu: $S = \pi r^2$

Obsah kruhové výseče: $S = \frac{\pi r^2}{180} \cdot \varphi$

$$\pi r^2 = \frac{\pi \left(\frac{3r}{2}\right)^2}{360} \cdot \varphi \cdot 360$$

$$360\pi r^2 = \pi \cdot \frac{9r^2}{4} \cdot \varphi \cdot 4$$

$$1440\pi r^2 = 9\pi r^2 \varphi$$

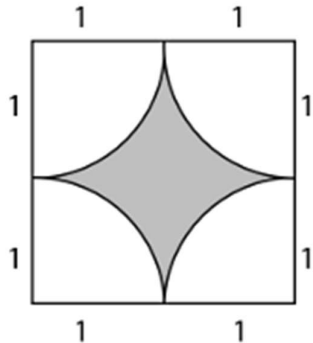
$$\varphi = \frac{1440\pi r^2}{9\pi r^2}$$

$$\varphi = 160^\circ$$

Výsledek: B, 2 body

Podzim 2024**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10**

Dvoubarevná dlaždice, znázorněná na obrázku, má tvar čtverce. Strana tohoto čtverce má délku 2 jednotky. Hranice tmavé části dlaždice tvoří čtyři kružnicové oblouky. Každý z nich má střed v jiném vrcholu čtverce a poloměr 1 jednotku.



- 10** Jaký je poměr obsahu tmavé části dlaždice z výchozího obrázku ku obsahu celé této dlaždice? Výsledek vyjádřete pomocí čísla π .

Řešení

Bílá část obrazce tvoří jeden kruh $S = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ cm}^2$

Obsah celého čtverce: $S = a^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

Obsah tmavé části je roven obsahu čtverce – obsah kruhu: $S = (4 - \pi) \text{ cm}^2$

Poměr je tedy $(4 - \pi) : 4$

Výsledek: Poměr obsahu tmavé části dlaždice ku obsahu celé dlaždice je $(4 - \pi) : 4$, 2 body

12 V trojúhelníku ABC jsou dány délky stran $a = 7$ cm; $b = 8$ cm; $c = 13$ cm.

Vypočítejte součet dvou vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, z nichž ani jeden není největším vnitřním úhlem tohoto trojúhelníku.

Řešení

Vypočítáme největší úhel v trojúhelníku γ (leží proti největší straně) a pak $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$.

Použijeme kosinovou větu.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$2ab \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad / : 2ab$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos \gamma = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = 120^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Výsledek: Součet velikostí dvou menších úhlů je 60° , 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

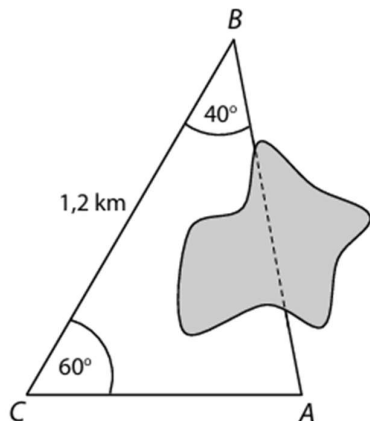
Místo A je od místa B oddělené vodní nádrží (šedá plocha). Most, který vede přes nádrž po nejkratší spojnici z A do B, se opravuje. Proto se musí (dle obrázku) užívat cesta tvořená přínými úseky AC a CB.

Jsou známy tyto údaje: $|CB| = 1,2 \text{ km}$

$\beta = 40^\circ$ (úhel při vrcholu B)

$\gamma = 60^\circ$ (úhel při vrcholu C)

Jakmile se most opraví, bude možné využívat i přímou cestu z A do B.



25 O kolik metrů se zkrátí cesta z A do B po opravě mostu, využije-li se přímá cesta?

Výsledek zaokrouhlete na stovky metrů.

- A) 600 B) 800 C) 900 D) 1 000 E) 1 100

Řešení

Nejprve vypočítáme velikost úhlu α .

$$\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

Nyní pomocí sinové věty strany b , c .

$$\frac{b}{1200} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \quad / \cdot 1200$$

$$b = 1200 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = 783 \text{ m}$$

$$\frac{c}{1200} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \quad / \cdot 1200$$

$$c = 1200 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = 1055 \text{ m}$$

$$\text{Delší trasa: } b + a = 783 + 1200 = 1983 \text{ m}$$

$$\text{Kratší trasa: } c = 1055 \text{ m}$$

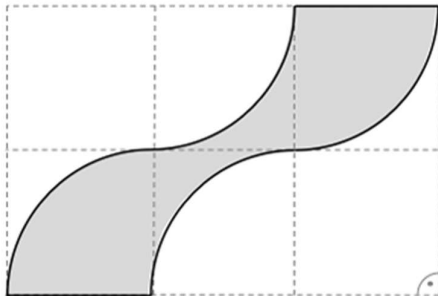
$$1983 - 1055 = 928 \text{ m} \doteq 900 \text{ m}$$

Výsledek: C, 2 body

Jaro 2024

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec na obrázku je ohraničen čtyřmi čtvrtkružnicemi o poloměru 5 cm a stranami dvou čtverců.



10

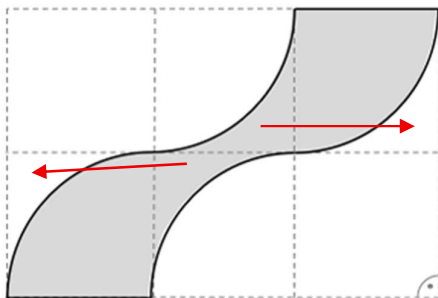
10.1 Vypočtete obsah šedého obrazce v cm^2 .

10.2 Vypočtete obvod šedého obrazce v cm. Zaokrouhlete výsledek na desetiny cm.

Řešení

10.1

Po vhodném přemístění šedých ploch



vidíme, že šedý obrazec zabírá plochu dvou čtverců se stranou 5 cm $\Rightarrow S = 50 \text{ cm}^2$

10.2

Obvod šedého obrazce je dohromady obvod jedné kružnice o poloměru 5 cm + dva poloměry

$$S = 2\pi r + 2r = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 41,4 \text{ cm}$$

Výsledek: 10.1 50 cm²; 10.2 41,4 cm; max. 2 body

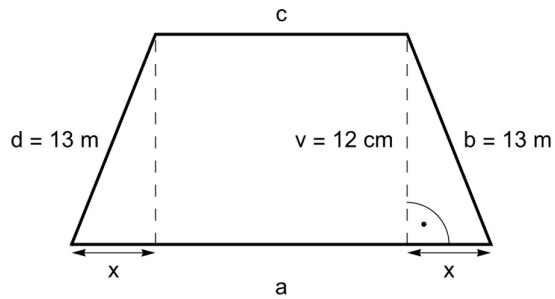
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Je dán rovnoramenný lichoběžník o obvodu 96 cm. Rameno lichoběžníku má délku 13 cm a výška lichoběžníku je 12 cm.

23 V jakém poměru (delší : kratší) jsou délky základů lichoběžníku?

A) 5 : 2 B) 4 : 3 C) 3 : 2 D) 2 : 1 E) nelze určit

Řešení



$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}$$

$$o = a + b + c + d$$

$$96 = x + c + x + b + c + d$$

$$96 = 5 + c + 5 + 13 + c + 13$$

$$96 - 36 = 2c$$

$$c = 30 \text{ cm}$$

$$a = x + c + x = 40 \text{ cm}$$

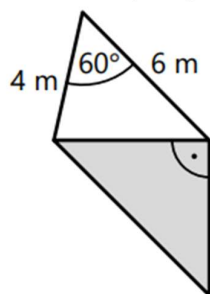
$$\frac{40}{30} = 4:3$$

Výsledek: B, 2 body

Podzim 2023

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Nad pískovištěm je natažena stínící plachta tvaru čtyřúhelníku, který se skládá ze dvou trojúhelníků – bílého a šedého. Šedý trojúhelník je rovnoramenný a pravoúhlý.



18 Jaký je obsah šedého trojúhelníku?

- A) $10,0m^2$ B) $10,4m^2$ C) $13,0m^2$ D) $13,5m^2$ E) $14,0m^2$

Řešení

Pomocí kosinové věty určíme velikost odvěsny x šedého trojúhelníku.

$$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 28$$

Nyní vypočítáme obsah šedého trojúhelníku:

$$S = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{28}{2} = 14 m^2$$

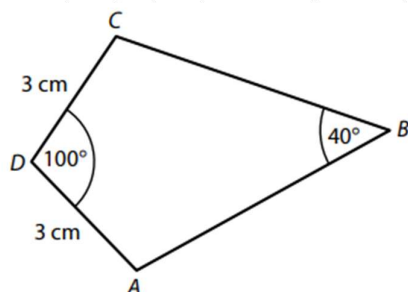
Výsledek: E, 2 body

Jaro 2023

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Čtyřúhelník ABCD se skládá ze dvou shodných trojúhelníků ABD a CBD.

Platí: $|AD| = |CD| = 3 \text{ cm}$, $|\sphericalangle ADC| = 100^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 40^\circ$.



13 Vypočtěte v cm délku úhlopříčky

13.1 AC,

13.2 BD.

Výsledky zaokrouhlete na desetiny cm.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení

13.1

Délku úhlopříčky AC určíme pomocí kosinové věty:

$$|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 100^\circ$$

$$|AC| = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 100^\circ} \doteq 4,6 \text{ cm}$$

13.2

Délku úhlopříčky BD určíme pomocí sinové věty, úhlopříčka BD pólí úhly 100° a 40° , úhel u vrcholu $c = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$:

$$\frac{|BD|}{3} = \frac{\sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} / \cdot 3$$

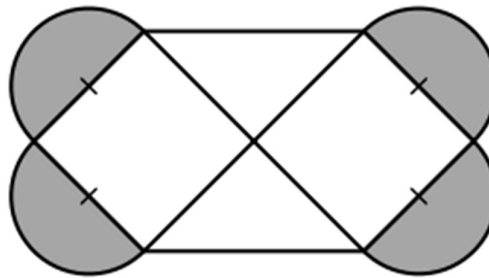
$$|BD| = 3 \cdot \frac{\sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} \doteq 8,2 \text{ cm}$$

Výsledek: 13.1 4,6 cm, 13.2 8,2 cm, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Obrazec obsahuje čtyři tmavé půlkruhy a bílý šestiúhelník, který se skládá ze dvou shodných čtverců a dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Celkový obsah tmavých částí obrazce je $32\pi \text{ cm}^2$.
(Průměrem každého půlkruhu je strana čtverce.)

**17 Jaký je obsah bílého šestiúhelníku?**

- A) 48 cm^2 B) 96 cm^2 C) 128 cm^2 D) 183 cm^2 E) 192 cm^2

Řešení

Celkový obsah tmavých částí obrazce tvoří dva kruhy

$$S = \pi r^2$$

$$2 \cdot \pi r^2 = 32\pi \quad / : 2\pi$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

Obsah bílého šestiúhelníku je tvořen třemi čtverci o straně $a = 2 \cdot r = 8 \text{ cm}$

$$S = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot 8^2 = 192 \text{ cm}^2$$

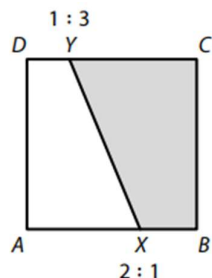
Výsledek: E. 2 body

Podzim 2022**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 11–12**

Čtverec ABCD je úsečkou XY rozdělen na dva lichoběžníky – bílý AXYD a šedý XBCY.

Bod X dělí stranu AB na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru $|AX| : |XB| = 2 : 1$.

Bod Y dělí stranu CD na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru $|DY| : |YC| = 1 : 3$



11 Vypočítejte a zapíšte v základním tvaru poměr délek obou základů bílého lichoběžníku AXYD.

12 Šedý lichoběžník XBCY má výšku 36 cm.

Vypočítejte

12.1 v cm^2 obsah šedého lichoběžníku XBCY,

12.2 v cm obvod šedého lichoběžníku XBCY

Řešení

Snažší je řešit nejprve úlohu 12

12

Výška lichoběžníku XBCY je současně stranou čtverce ABCD.

$$|AB| = 36 \text{ cm}, \text{ rozdělíme v poměru } 2 : 1 \Rightarrow |AX| = \frac{36}{3} \cdot 2 = 24 \text{ cm}, |XB| = \frac{36}{3} \cdot 1 = 12 \text{ cm}$$

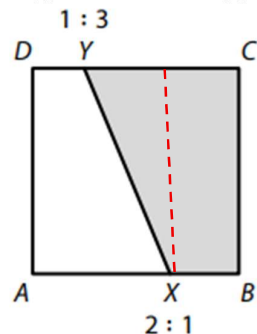
$$|CD| = 36 \text{ cm}, \text{ rozdělíme v poměru } 1 : 3 \Rightarrow |DY| = \frac{36}{4} \cdot 1 = 9 \text{ cm}, |YC| = \frac{36}{4} \cdot 3 = 27 \text{ cm}$$

12.1

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{12+27}{2} \cdot 36 = 702 \text{ cm}^2$$

12.2

Nejprve musíme vypočítat délku strany XY pomocí Pythagorovy věty:



$$|XY|^2 = 36^2 + (|YC| - |XB|)^2$$

$$|XY|^2 = 36^2 + (27 - 12)^2$$

$$|XY|^2 = 1521$$

$$|XY| = 39$$

$$o = 12 + 36 + 27 + 39 = 114 \text{ cm}$$

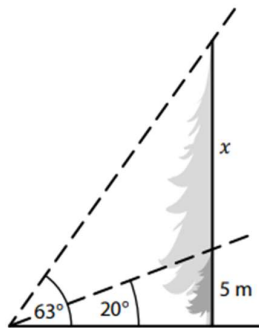
11

$$\frac{|AX|}{|DY|} = \frac{24}{9} = 8:3$$

Výsledek: 11 $|AX| : |DY| = 8 : 3$, 1 bod, 12.1 702 cm^2 , 1 bod, 12.2 114 cm , 1 bod.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Chlapec viděl z okna sklípku pod výškovým úhlem 20° vrchol stromu vysokého 5 m. Strom roste stále svisle. Pata stromu a místo pozorování leží v téže vodorovné rovině. Po 60 letech viděl jeho vnuk ze stejného místa vrchol téhož stromu pod výškovým úhlem 63° . Během této doby strom vyrostl o x metrů.



13 Vypočtěte, o kolik metrů vyrostl strom během uvedených 60 let.

Výsledek x zaokrouhlete na celé číslo, dílčí výpočty nezaokrouhľujte.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Nejprve vypočítáme vzdálenost y paty stromu od místa pozorování

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{5}{y}$$

$$y \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 5 \quad : \operatorname{tg} 20^\circ$$

$$y = \frac{5}{\operatorname{tg} 20^\circ} = 13,74 \text{ m}$$

Nyní současnou výšku z

$$\operatorname{tg} 63^\circ = \frac{z}{y}$$

$$z = y \cdot \operatorname{tg} 63^\circ = 27 \text{ m}$$

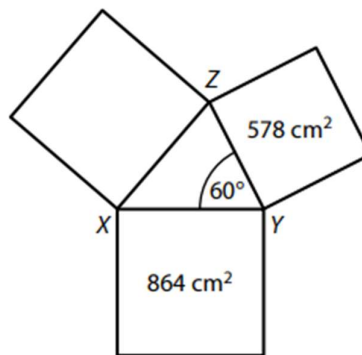
A nakonec x

$$x = z - 5 = 27 - 5 = 22 \text{ m}$$

Výsledek: 22 metrů, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 24

Tři čtverce, z nichž každé dva mají právě jeden společný vrchol, vymezují trojúhelník XYZ. V obrázku jsou uvedeny obsahy dvou čtverců a velikost vnitřního úhlu trojúhelníku XYZ.

**24 Jaký je obsah trojúhelníku XYZ?**

- A) menší než 285 cm² B) 286 cm² C) 306 cm² D) 353 cm² E) větší než 354 cm²

Řešení

Použijeme vzorec pro obsah čtverce $S = a^2$, obsahy známe, určíme velikosti stran XY a YZ :

$$|XY| = \sqrt{864} = 12\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$|YZ| = \sqrt{578} = 17\sqrt{2} \text{ cm}$$

Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$

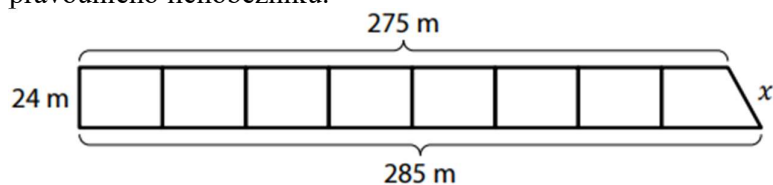
$$S = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{6} \cdot 17\sqrt{2} \sin 60^\circ = 306 \text{ cm}^2$$

Výsledek: C, 2 body

Jaro 2022

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Pozemek má tvar pravoúhlého lichoběžníku s výškou 24 m a základnami délek 285 m a 275 m. Pozemek je rozdělen na 8 parcel o stejné výměře. Prvních sedm parcel tvoří shodné obdélníky, poslední parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníku.



5 Vypočtete

5.1 v m^2 výměru jedné parcely,

5.2 v m chybějící délku x strany pozemku,

5.3 v m obvod **poslední** parcely.

Řešení

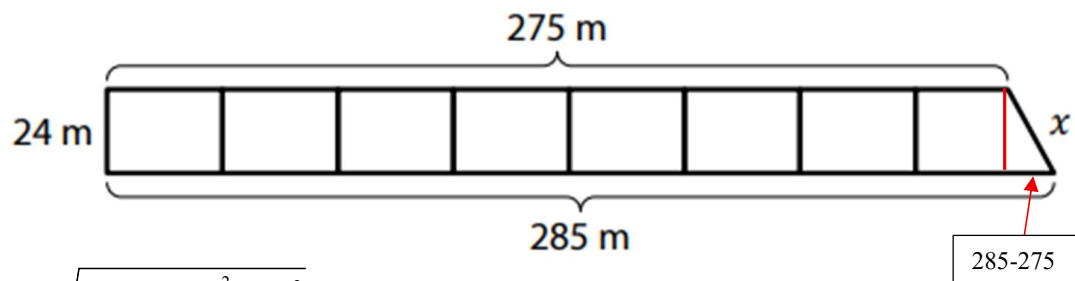
$$\text{Obsah celého lichoběžníku: } S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{285+275}{2} \cdot 24 = 6720 m^2$$

5.1

$$\text{Obsah jedné parcely: } \frac{6720}{8} = 840 m^2$$

5.2

Délku x určíme pomocí Pythagorovy věty



$$x = \sqrt{(285-275)^2 + 24^2} = 26 m$$

5.3

Nejprve pomocí vzorce pro obsah určíme součet velikostí základů $a+c$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$840 = \frac{a+c}{2} \cdot 24$$

$$840 = (a+c) \cdot 12$$

$$a+c = \frac{840}{12} = 70$$

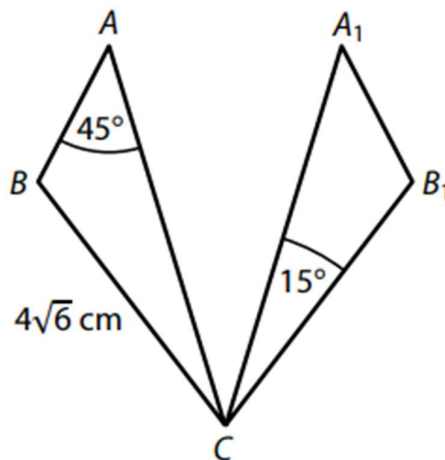
$$o = a+c+x+24 = 70+26+24 = 120 m$$

Výsledky: 5.1 840 m², 5.2 26 m, 5.3 120 m, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti je trojúhelník A_1B_1C .

Platí: $|BC| = 4\sqrt{6}$, $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$, $|\sphericalangle A_1CB_1| = 15^\circ$



18 Jaká je délka strany A_1C ?

- A) $4 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$ B) 10 cm C) 12 cm D) $8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$ E) jiná délka

Řešení

Osová souměrnost je shodné zobrazení, proto jsou oba trojúhelníky shodné.

$|\sphericalangle ACB| = 15^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 120^\circ$. Budeme řešit levý trojúhelník pomocí sinové věty,

$$|A_1C| = |AC|$$

$$\frac{|AC|}{4\sqrt{6}} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} / \cdot 4\sqrt{6}$$

$$|AC| = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 12 \text{ cm}$$

Výsledek. C, 2 body

Podzim 2021

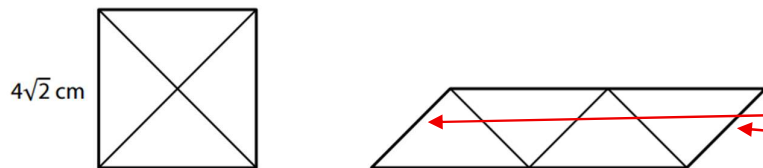
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Čtverec o straně délky $4\sqrt{2}$ cm je rozdělen na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky. Z těchto čtyř trojúhelníků je sestaven zobrazený kosodélník.



13 Vypočtete, o kolik cm se liší obvod kosodélníku a čtverce.

Řešení



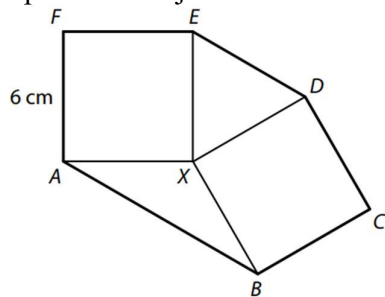
Obvod kosodélníku je větší o velikosti těchto dvou stran, což je dohromady velikost úhlopříčky ve čtverci

$$u = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 + 32} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Výsledek: Obvod kosodélníku a čtverce se liší o 8 cm, 1 bod.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Šestiúhelník ABCDEF se skládá ze dvou čtverců AXEF, XBCD, rovnostranného trojúhelníku XDE a tupoúhlého trojúhelníku ABX. Délka strany AF je 6 cm.



14 Vypočtete v cm délku strany AB.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Délku strany AB spočítáme pomocí kosinové věty z trojúhelníku ABX,

$$|AX| = |BX| = 6 \text{ cm}$$

Velikosti všech úhlů v trojúhelníku XDE jsou 60° , protože je rovnostranný.

$$|\angle AXB| = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$

$$|AB|^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 108$$

$$|AB| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

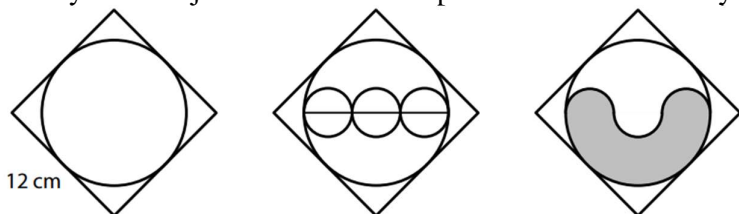
Výsledek: $6 \cdot \sqrt{3}$ cm, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Do čtverce se stranou délky 12 cm je vepsána velká kružnice.

Jeden z průměrů velké kružnice pólí každou ze tří malých shodných kružnic. Každá z těchto čtyř kružnic se dotýká právě dvou ze zbývajících kružnic.

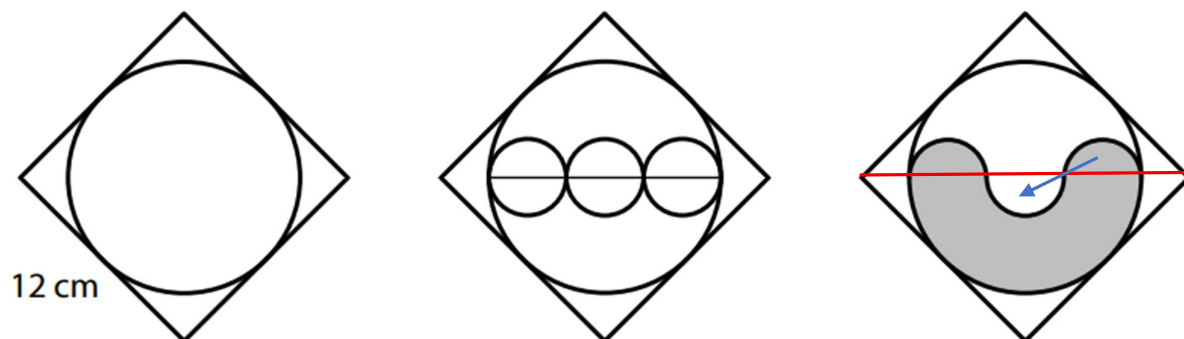
Tmavý obrazec je ohraničen velkou půlkružnicí a třemi malými půlkružnicemi.



18 Jaký je obsah tmavého obrazce?

- A) menší než $18\pi \text{ cm}^2$ B) $18\pi \text{ cm}^2$ C) $20\pi \text{ cm}^2$ D) $24\pi \text{ cm}^2$ E) větší než $24\pi \text{ cm}^2$

Řešení



Když jeden půlkruh přesuneme ve směru šipky, tak je patrné, že tmavý obrazec se skládá z jednoho velkého půlkruhu a jednoho malého půlkruhu. Poloměr velkého je 6 cm, poloměr malého 2 cm.

$$\text{Obsah velkého půlkruhu: } S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 18\pi$$

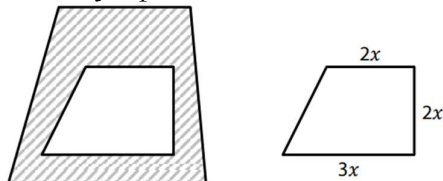
$$\text{Obsah malého půlkruhu: } S_2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$$

$$S_1 + S_2 = 20\pi \text{ cm}^2$$

Výsledek: C, 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Část šrafovaného lichoběžníku je překryta celým bílým pravoúhlým lichoběžníkem. Bílý lichoběžník má základny délek $2x$ a $3x$ a výšku o velikosti $2x$, kde x je délka v metrech. Ve šrafovaném lichoběžníku jsou obě základny o polovinu delší než v bílém lichoběžníku a výška je dvakrát větší než v bílém lichoběžníku.



19 Jaký je obsah nezakryté části šrafovaného lichoběžníku?

- A) menší než $8x^2$ B) $8x^2$ C) $9x^2$ D) $10x^2$ E) větší než $10x^2$

Řešení

Obsah bílého lichoběžníku: $S_1 = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{3x+2x}{2} \cdot 2x = \frac{5x}{2} \cdot 2x = 5x^2$

Šrafovaný lichoběžník má základny $4,5x$ a $3x$ a výšku $4x$, jeho obsah je

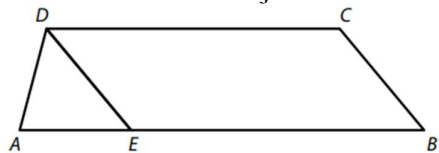
$$S_2 = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{4,5x+3x}{2} \cdot 4x = \frac{7,5x}{2} \cdot 4x = 15x^2$$

Obsah nezakryté části je $S_2 - S_1 = 15x^2 - 5x^2 = 10x^2$

Výsledek: D, 2 body.

Mimořádný termín červenec 2021**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7**

Lichoběžník ABCD se základnou AB se skládá z trojúhelníku AED a rovnoběžníku EBCD. Obsah rovnoběžníku EBCD je šestkrát větší než obsah trojúhelníku AED.



7 Určete, kolikrát je základna AB lichoběžníku delší než úsečka AE.

Řešení

$$S_1 = \frac{|AE| \cdot v}{2}$$

$$S_2 = |EB| \cdot v$$

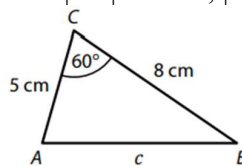
$$6 \cdot \frac{|AE| \cdot v}{2} = |EB| \cdot v$$

$$3 \cdot |AE| = |EB| \Rightarrow |AB| = 4 \cdot |AE|$$

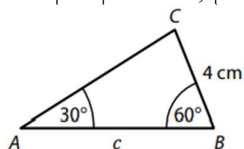
Výsledek: 4 krát, 1 bod

26 Přiřaďte ke každému zadání trojúhelníku ABC (26.1–26.3) odpovídající délku c úsečky AB (A–E).

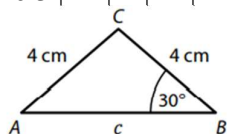
26.1 $|BC| = 8 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$, $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$



26.2 $|BC| = 4 \text{ cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$



26.3 $|AC| = |BC| = 4 \text{ cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$



A) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ B) 6 cm C) $4\sqrt{3} \text{ cm}$ D) 7 cm E) 8 cm

Řešení

26.1

	$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$ $c^2 = 49$ $c = 7 \text{ cm}$
--	---

26.2

	$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ $\frac{c}{4} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$ $c = 4 \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 8 \text{ cm}$
--	--

26.3

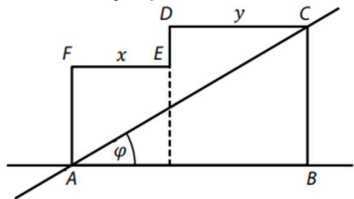
	Trojúhelník je rovnoramenný, výška na základnu pólí základnu. $\cos 30^\circ = \frac{x}{4}$ $x = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ $c = 2 \cdot x = 4\sqrt{3}$
--	--

Výsledek: D E C, max. 3 body

Jaro 2021

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Šestiúhelník ABCDEF na obrázku je složen ze dvou čtverců, jejichž strany mají délky x , y . Odchylka přímek AB a AC je φ .



12 Vypočítejte poměr $y : x$, jestliže platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{9}{13}$$

Řešení

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x + y}$$

$$\frac{9}{13} = \frac{y}{x + y} \quad / \cdot 13(x + y)$$

$$9(x + y) = 13y$$

$$9x + 9y = 13y$$

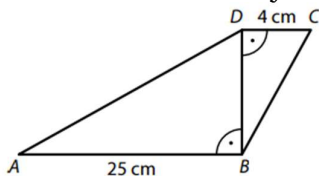
$$9x = 4y$$

$$\frac{9}{4} = \frac{y}{x}$$

Výsledek: $y : x = 9 : 4$, 1bod

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

V lichoběžníku ABCD mají základny AB a CD délky 25 cm a 4 cm. Úhlopříčka BD je současně výškou lichoběžníku a rozděluje ho na dva trojúhelníky, které jsou podobné.



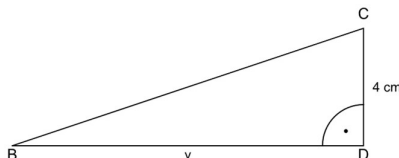
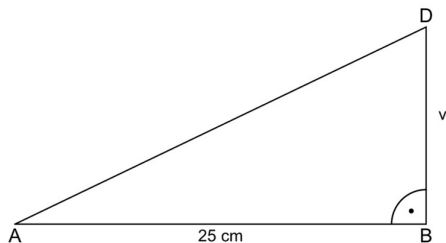
15 Vypočtěte v cm^2 obsah lichoběžníku ABCD.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Trojúhelníky jsou podobné, nakreslíme si každý trojúhelník zvlášť, ale tak, aby si příslušné strany odpovídaly.

$\triangle ABD$ je podobný $\triangle BDC$



Nyní využijeme podobnost trojúhelníků:

u podobných trojúhelníků je poměr velikostí každých dvou stran jednoho trojúhelníku roven poměru velikostí příslušných stran druhého trojúhelníku.

$$\frac{4}{v} = \frac{v}{25}$$

$$100 = v^2$$

$$v = 10 \text{ cm}$$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{25+4}{2} \cdot 10 = 145 \text{ cm}^2$$

Výsledek: 145 cm^2 , max. 2 body

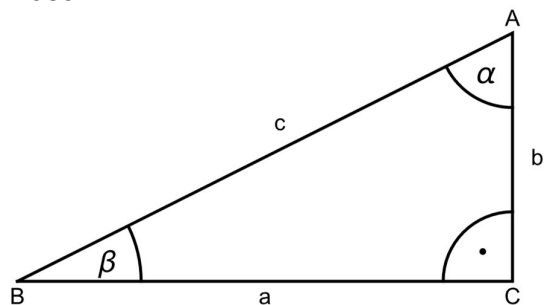
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pravoúhlém trojúhelníku ABC má přepona AB délku c , odvěsna AC délku b a zbývající strana délku a . Vnitřní úhel při vrcholu A má velikost α a při vrcholu B velikost β .

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ 16.2 $\frac{a+b}{c} = 1$ 16.3 $c \cdot \sin \alpha = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ 16.4 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$

Řešení



16.1

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad / \cdot c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jedná se o Pythagorovu větu, pro pravoúhlý trojúhelník platí $\Rightarrow$ **A**

16.2

$$\frac{a+b}{c} = 1 \quad / \cdot c$$

$$a+b=c$$

Součet dvou stran je vždy větší než strana třetí $\Rightarrow$ **N**

16.3

$$c \cdot \sin \alpha = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$c \cdot \frac{a}{c} = b \cdot \frac{a}{b}$$

$$a = a$$

Platí $\Rightarrow$ **A**

16.4

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad / \cdot c^2$$

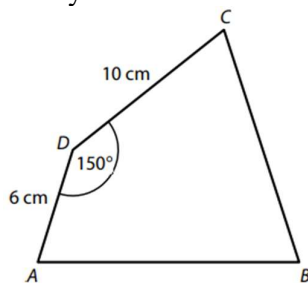
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jedná se o Pythagorovu větu, pro pravoúhlý trojúhelník platí $\Rightarrow$ **A**

Výsledek: A N A A, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Ve čtyřúhelníku ABCD o obsahu 70 cm^2 platí: $|\angle ADC| = 150^\circ$, $|CD| = 10 \text{ cm}$, $|AD| = 6 \text{ cm}$.



17 Jaký je obsah trojúhelníku ABC?

- A) menší než 43 cm^2 B) 44 cm^2 C) 49 cm^2 D) 55 cm^2 E) větší než 56 cm^2

Řešení

Obsah trojúhelníku ABC určíme tak, že od obsahu čtyřúhelníku, který známe, odečteme obsah trojúhelníku ACD, který umíme spočítat.

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 150^\circ = 15 \text{ cm}^2$$

$$S_{ABC} = 70 - 15 = 55 \text{ cm}^2$$

Výsledek: D, 2 body.
