

Funkce

Podzim 2025

7 Řešte v oboru $\mathbf{R}$:

$$\log_{10}(1000 - x^2) = 2 \cdot \log_{10} 10$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\log_{10}(1000 - x^2) = 2 \cdot \log_{10} 10$$

$$\log_{10}(1000 - x^2) = \log_{10} 10^2$$

$$1000 - x^2 = 100$$

$$x^2 = 900$$

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = -30$$

Výsledek: $K = \{-30; 30\}$, 2 body

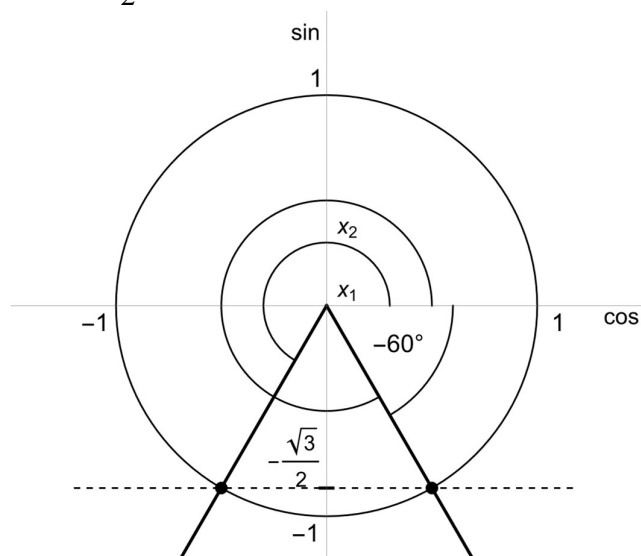
9 Řešte v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$:

$$-2 \cdot \sin x = \sqrt{3}$$

Řešení

$$-2 \cdot \sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Kalkulačka nám po SHIFT $\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ukáže

výsledek -60° . Toto je jedno z řešení, ale ne základní kořen. Základní kořeny určíme z jednotkové kružnice:

$$x_1 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$x_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

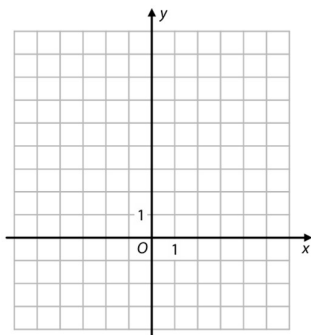
Výsledek: $K = \{240^\circ; 300^\circ\}$ nebo $K = \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Kvadratické funkce f, g jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

$$f: y = (x+1)^2$$

$$g: y = -x^2 + 5$$



10

10.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte grafy obou kvadratických funkcí f, g a vyznačte body P, Q, v nichž se grafy protínají.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

10.2 Určete obě souřadnice každého z průsečíků P, Q grafů funkcí f a g .

Řešení

Nejprve určíme body P, Q v nichž se grafy protínají:

$$(x+1)^2 = -x^2 + 5$$

$$x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 5$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 36$$

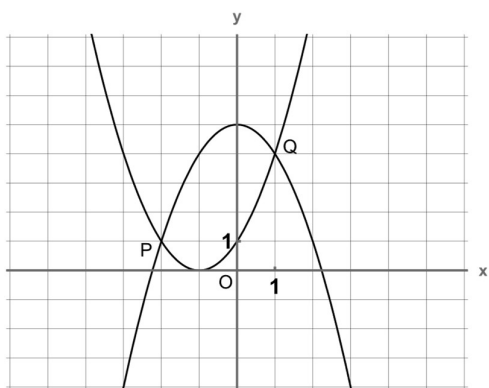
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 6}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

Hodnotu y určíme z funkce f nebo g :

$$y_1 = (1+1)^2 = 4; y_2 = (-2+1)^2 = 1$$

$$P = [-2; 1], Q = [1; 4]$$



Grafem funkce $f: y = (x+1)^2$ je parabola otevřená nahoru s vrcholem v bodě $[-1; 0]$

Grafem funkce $g: y = -x^2 + 5$ je parabola otevřená dolů s vrcholem v bodě $[0; 5]$

Obě načrtnuté křivky musí mít správně umístěný vrchol paraboly a procházet body P, Q a být souměrné podle svislé osy příslušné paraboly.

Výsledek: 10.1 graf s vyznačením bodů P, Q, 10.2 $P = [-2; 1], Q = [1; 4]$, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Funkce f je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$:

$$f: y = \frac{1-3x}{x}$$

V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestojíme graf funkce f .

24 Která z následujících přímek (a, b, c, d, e) nemá s grafem funkce f žádný společný bod?

A) $a: x = -3$ B) $b: x = 3$ C) $c: y = -3$ D) $d: y = 3$ E) $e: y = 1 - 3x$

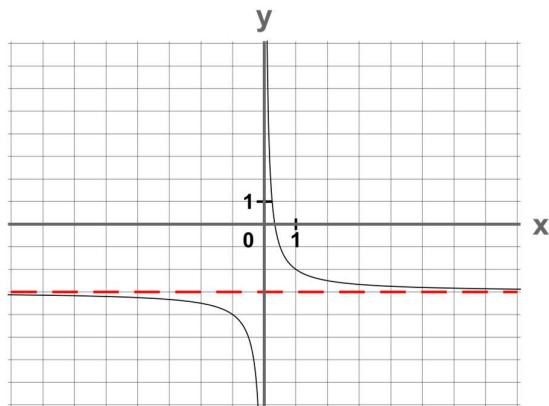
Řešení

Funkční rovnici funkce f nejprve upravíme:

$$f: y = \frac{1-3x}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} - 3$$

Jedná se o Lineární lomenou funkci



Červená přímka nemá s grafem žádný společný bod, její rovnice je $y = -3$, správná odpověď je C.

Další přímkou, která nemá s grafem žádný společný bod, je osa y . Její rovnice je $x = 0$, ale tato odpověď mezi navrženými není.

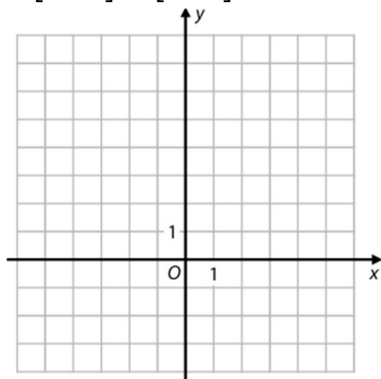
Výsledek: C, 2 body

Jaro 2025

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Kvadratická funkce $f: y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

V kartézské soustavě souřadnic Oxy má graf lineární funkce g s grafem funkce f právě dva společné body: $A[4; a_2]$, $B[0; b_2]$.



9

9.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf kvadratické funkce f .

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

9.2 Sestavte předpis lineární funkce g .

Řešení

Nejprve dopočítáme souřadnice bodů A , B dosazením do funkční rovnice funkce f :

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 = 6; \quad b_2 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 = -2; \quad A[4; 6], B[0; -2]$$

Nyní můžeme určit předpis lineární funkce g :

$$y = ax + b$$

$$6 = a \cdot 4 + b$$

$$-2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -2$$

$$6 = 4a - 2 \Rightarrow a = 2$$

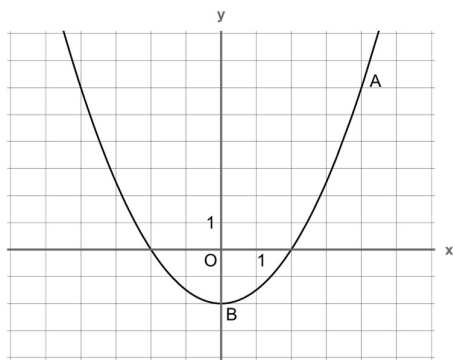
Předpis lineární funkce g je $y = 2x - 2$

Grafem kvadratické funkce je parabola s vrcholem $[0; -2]$ otevřená nahoru.

Průsečíky s osou x určíme dosazením čísla 0 za y do funkční rovnice.

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$x_1 = -2; x_2 = 2$$



Výsledek: 9.1 graf musí procházet body A , B a průsečíky $[-2; 0]$ a $[2; 0]$ s osou x , musí být souměrný podle souřadnicové osy y , 9.2 $y = 2x - 2$, max. 2 body

10 Je dáno $x \in R$ pro které platí:

$$\log_4 x = 5$$

Pro dané x vypočtěte:

10.1 $(\log_4 x)^3 =$

10.2 $\log_4 x^3 =$

Řešení

$$\log_4 x = 5$$

10.1 $(\log_4 x)^3 = 5^3 = 125$

10.2 $\log_4 x^3 = 3 \cdot \log_4 x = 3 \cdot 5 = 15$

Výsledek: 10.1 125, 10.2 15, max. 2 body

24 Je dána rovnice s neznámou $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

$$\operatorname{tg} x = 3 \cdot \cotg x$$

Kolik řešení má daná rovnice v uvedeném intervalu?

A) žádné B) jedno C) dvě D) tři E) čtyři

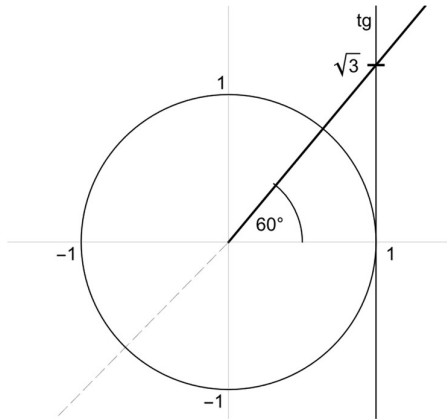
Řešení

$$\operatorname{tg} x = 3 \cdot \cotg x$$

$$\operatorname{tg} x = 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad / \cdot \operatorname{tg} x$$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = 3$$

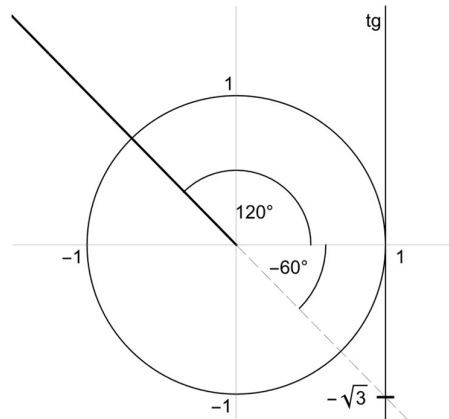
$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \text{nebo} \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$



Z jednotkové kružnice je vidět, že rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ má dvě řešení:

$$x_1 = 60^\circ$$

$$x_2 = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$$



Z jednotkové kružnice je vidět, že rovnice $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ má dvě řešení:

$$x_3 = 120^\circ$$

$$x_4 = 120^\circ + 180^\circ = 300^\circ$$

Výsledek: E, 2 body

Podzim 2024

7 Předpis funkce f , definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je

$$y = 5^{x-1} - 5^{x-2}$$

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je hodnota funkce f rovna 20.

Do záznamového archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Rozdíl nebo součet mocnin nejde upravit, nejprve musíme vytknutím převést na součin.

$$y = 5^{x-1} - 5^{x-2}$$

$$20 = 5^x \cdot 5^{-1} - 5^x \cdot 5^{-2}$$

$$20 = 5^x \cdot (5^{-1} - 5^{-2})$$

$$20 = 5^x \cdot \frac{4}{25} \quad / \cdot 25$$

$$500 = 5^x \cdot 4 \quad / : 4$$

$$125 = 5^x$$

$$5^3 = 5^x$$

$$x = 3$$

Výsledek: $x = 3$, max. 2 body

8 Předpis funkce f , definované pro všechna přípustná $x \in R$, je

$$y = \log_4(2x+1)$$

8.1 Určete definiční obor funkce f . Zapište ho pomocí intervalu.

8.2 Určete všechna $x \in R$, pro která je hodnota funkce f rovna $-\frac{1}{2}$.

Řešení

8.1

$$y = \log_4(2x+1)$$

$$2x+1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

8.2

$$y = \log_4(2x+1)$$

$$-\frac{1}{2} = \log_4(2x+1) \quad \text{použijeme pravidlo } y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$$

$$2x+1 = 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$2x+1 = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Výsledek: 8.1 $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$, **8.2** $x = -\frac{1}{4}$, **max. 2 body**

9 Předpis kvadratické funkce g pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$y = x^2 - 2x - 2$$

Určete kartézské souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce g .

Řešení

$$-2 = x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x(x - 2)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$x_o = 1$$

$$y_o = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3$$

Výsledek: $V = [1; -3]$, 1 bod

20 Předpis funkce f pro všechna x z definičního oboru této funkce je

$$y = -x^2 - \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi$$

Který z následujících obrázků (A–E) je grafem funkce f v kartézské soustavě souřadnic Oxy ?

Řešení

Předpis funkce nejprve upravíme, $\operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi$ můžeme vypočítat na kalkulačce.

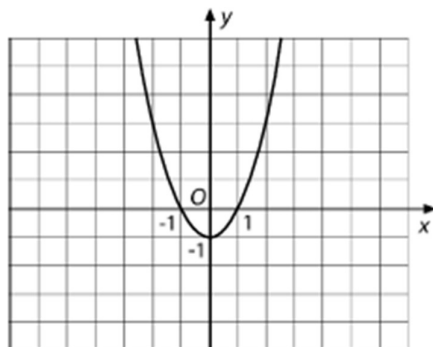
$$y = -x^2 - \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi$$

$$y = -x^2 - \operatorname{tg} 135^\circ$$

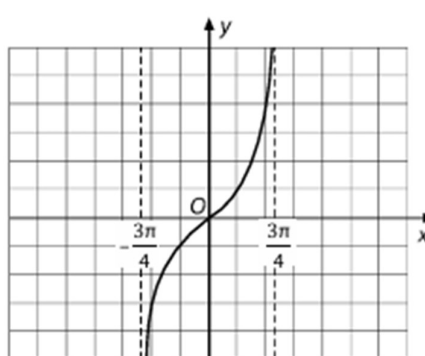
$$y = -x^2 + 1$$

Grafem funkce je parabola s vrcholem $V[0;1]$ otevřená dolů

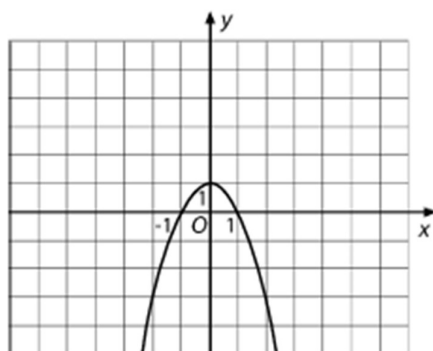
A



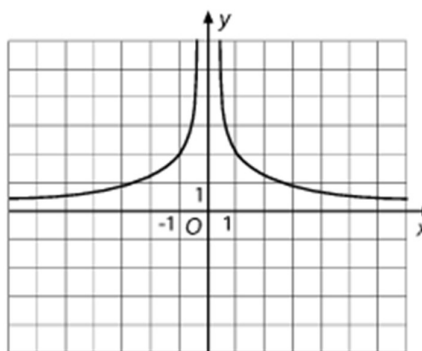
B



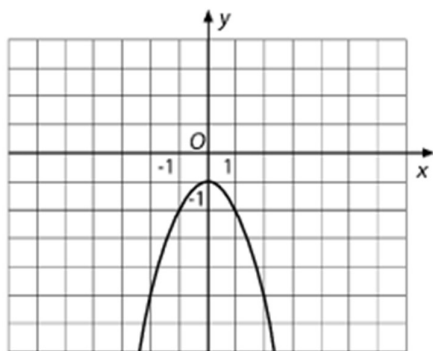
C



D



E



Výsledek: C, 2 body

21 Předpis funkce g je

$$y = (x - 3)(x + 5)(x^2 + 1)$$

Jaké číslo bude výsledkem, sečte-li se počet průsečíků funkce g s osou x a počet průsečíků funkce g s osou y ?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Řešení

Průsečík grafu funkce s osou x je bod (příp. více bodů), jejichž y -ová souřadnice je rovna nule.

Postup: do funkční rovnice dosadíme za y nulu a řešíme rovnici pro x .

$$y = (x - 3)(x + 5)(x^2 + 1)$$

$$0 = (x - 3)(x + 5)(x^2 + 1)$$

$$x_1 = 3; x_2 = -5$$

Průsečíky s osou x jsou dva.

Průsečík grafu funkce s osou y je bod, jehož x -ová souřadnice je rovna nule.

Postup: do funkční rovnice dosadíme za x nulu a vypočítáme y .

$$y = (x - 3)(x + 5)(x^2 + 1)$$

$$y = (0 - 3)(0 + 5)(0^2 + 1)$$

$$y = -15$$

Průsečík s osou y je jeden.

Výsledek: B, 2 body

Jaro 2024

7 Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a kladnou konstantu a platí:

$$16a^{x+1} = 4a^x$$

7.1 Vypočítejte hodnotu konstanty a .

7.2 Vypočítejte hodnotu a^x , jestliže $x = -\frac{1}{2}$.

Řešení

7.1

$$16a^{x+1} = 4a^x : 4$$

$$4 \cdot a^x \cdot a^1 = a^x : a^x$$

$$a = \frac{1}{4}$$

7.2

$$a^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$a^x = 2$$

Výsledek: 7.1 $a = \frac{1}{4}$, 7.2 $a^x = 2$, max. 2 body

8 Pro $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ **vypočtete:**

$$\log_a \frac{8}{\sqrt{a}} - \log_a 8a =$$

Řešení

$$\begin{aligned} \log_a \frac{8}{\sqrt{a}} - \log_a 8a &= \log_a 8 - \log_a \sqrt{a} - (\log_a 8 + \log_a a) = \log_a 8 - \log_a \sqrt{a} - \log_a 8 - \log_a a = \\ &= -\log_a \sqrt{a} - \log_a a = -\left(\log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_a a\right) = -\log_a \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a\right) = -\log_a a^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \log_a a = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nebo můžeme zkusit ne tak matematicky korektní, ale pragmatický postup:

za a dosazujeme různá vhodná čísla, například $a = 2, 3, 4$, spočítáme výsledek na kalkulačce a zkoumáme, jaký vztah má výsledek ke zvolenému číslu a .

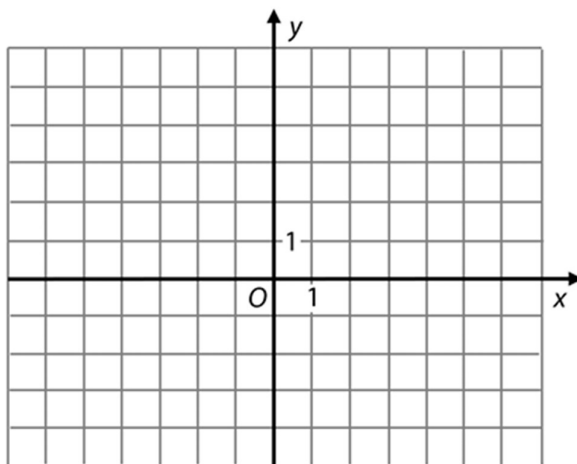
V tomto případě zjistíme, že pro různá a je výsledek vždy stejný a to $-\frac{3}{2}$

Výsledek: $-\frac{3}{2}$, **1 bod**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Ke dán předpis funkce f :

$$y = \frac{2x}{x-1} - 2$$



9

9.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy zakreslete graf funkce f , která je definovaná pro všechna přípustná $x \in R$.

Do soustavy souřadnic zakreslete asymptoty a graf funkce f tak, aby graf správně procházel mřížovými body.

9.2 Vypočtete průsečík $P = [p_1; p_2]$ funkce f s osou y .

Do záznamového archu запиšte obě souřadnice průsečíku funkce f s osou y .

V záznamovém archu obtáhněte své řešení propisovací tužkou.

Řešení

9.1

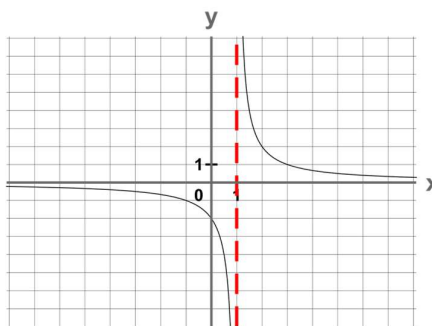
Jak sestavit graf této funkce je popsáno v kapitole Státní maturita/Funkce/Lineární lomená funkce.

Nejprve si předpis funkce upravíme:

$$y = \frac{2x}{x-1} - 2$$

$$y = \frac{2x - 2(x-1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2}{x-1}$$



Mřížové body určíme dosazením vhodných čísel za x do funkční rovnice, obě souřadnice musí být celá čísla, která je možné přesně zobrazit v soustavě souřadnic.

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1$$

9.2

Průsečík funkce s osou y určíme tak, že dosadíme do funkční rovnice $x = 0$.

$$y = \frac{2}{0-1} = -2$$

$$P = [0; -2]$$

Výsledek. 9.1 graf procházející správnými mřížovými body s vyznačenou asymptotou,

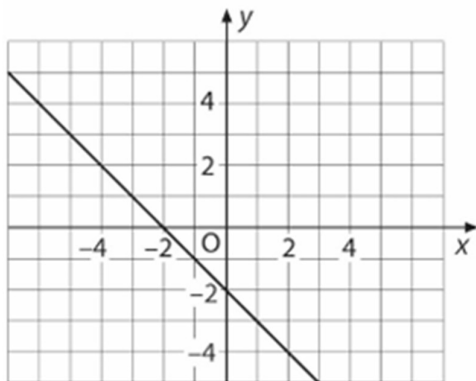
9.2 $P = [0; -2]$, max. 2 body

22 Předpis funkce f pro všechna x z definičního oboru funkce f je:

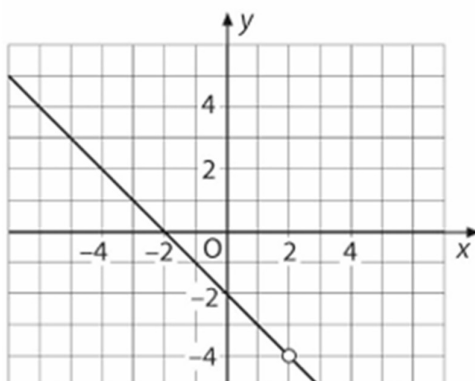
$$y = \frac{x^2 - 4}{2 - x}$$

Který z následujících grafů je grafem funkce f v kartézské soustavě souřadnic Oxy ?

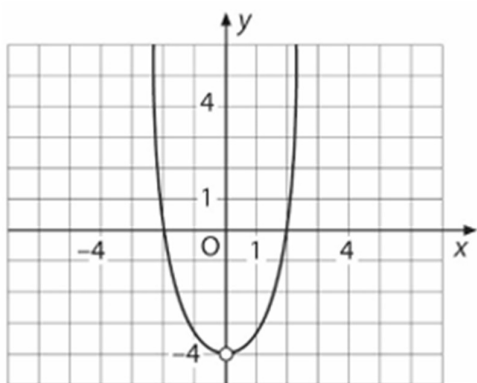
A



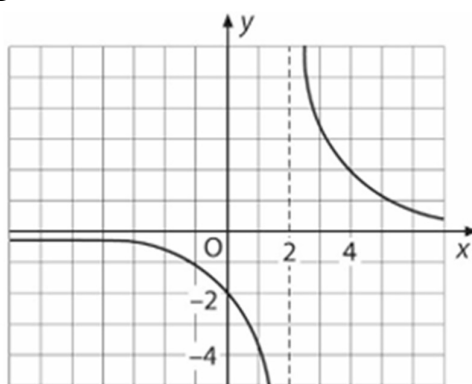
B



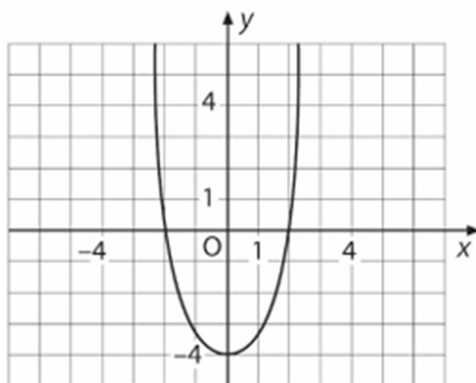
C



D



E



Řešení

Funkční rovnici nejprve upravíme

$$y = \frac{x^2 - 4}{2 - x} = \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)} = -(x+2) = -x-2$$

Tato úprava je možná pouze pro $x \neq 2$, grafem je tedy přímka, která neobsahuje bod, který má x-ovou souřadnici rovnou 2.

Výsledek: B, 2 body

Podzim 2023

6 Předpis funkce f definované pro všechna přípustná $x \in R$ je:

$$y = \log_{10}(8 - 2x) - \log_{10}(2 - x)$$

Určete všechna $x \in R$, pro která je hodnota funkce f rovna 1.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$y = \log_{10}(8 - 2x) - \log_{10}(2 - x)$$

$$1 = \log_{10} \frac{8 - 2x}{2 - x}$$

$$\frac{8 - 2x}{2 - x} = 10^1 \quad / \cdot 2 - x$$

$$8 - 2x = 20 - 10x$$

$$8x = 12$$

$$x = \frac{3}{2}$$

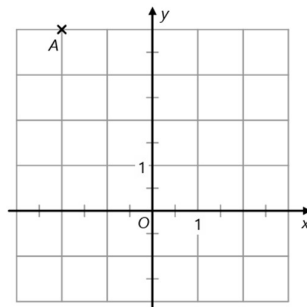
Zkouška

$$\log_{10}\left(8 - 2 \cdot \frac{3}{2}\right) - \log_{10}\left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1$$

Výsledek: $x = \frac{3}{2}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Funkce $g : y = a^x$ se základem $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Její graf prochází bodem $A[-2; 4]$.



7

7.1 Zapište souřadnici b_2 bodu $B[2; b_2]$ grafu funkce g .

7.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce g .

V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

Řešení

7.1

Nejprve určíme funkční rovnici, vypočítáme hodnotu základu a

$g : y = a^x$ dosadíme souřadnice bodu A

$$4 = a^{-2}$$

$$4 = \frac{1}{a^2} \cdot a^2$$

$$4a^2 = 1$$

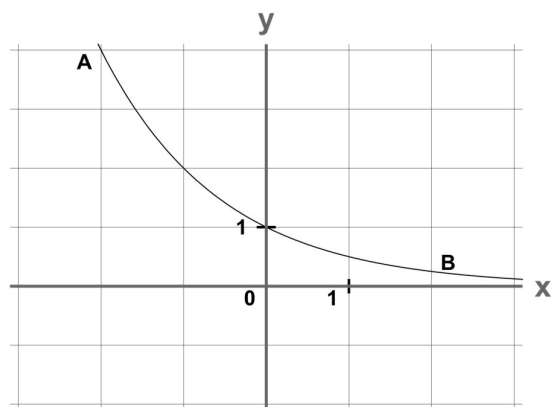
$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Určíme b_2 dosazením $x = 2$ do funkční rovnice funkce $g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

$$b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

7.2



Můžeme ještě dopočítat mřížové body: $x = -1 \Rightarrow y = 2$; $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Výsledek: 7.1 $b_2 = \frac{1}{4}$, 7.2 graf s vyznačenými body A, B , max. 2 body

- 8 Funkce $h: y = -(x+6)^2 + 4$ s definičním oborem $\mathbb{R}$ je v jednom ze dvou intervalů $(-\infty; p)$, $\langle p; +\infty)$ klesající a ve zbývajícím je rostoucí ($p \in \mathbb{R}$).

Z obou intervalů vyberte ten, v němž je funkce h rostoucí, a запиšte jej s konkrétním číslem p .

Řešení

Nejprve funkční rovnici upravíme:

$$h: y = -(x+6)^2 + 4$$

$$y = -(x^2 + 12x + 36) + 4$$

$$y = -x^2 - 12x - 32$$

Nyní určíme x -ovou souřadnici vrcholu:

$$y = -x^2 - 12x - 32$$

$$-32 = -x^2 - 12x - 32$$

$$x^2 + 12x = 0$$

$$x(x+12) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -12$$

$$x_0 = -6$$

Grafem je parabola otočená dolů, proto je funkce rostoucí na intervalu $(-\infty; 6)$

Výsledek: $(-\infty; 6)$, 1 bod

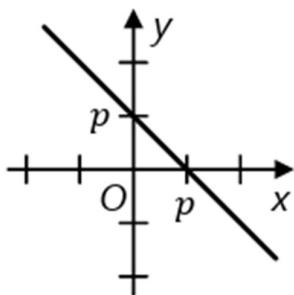
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Předpis funkce h definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je:

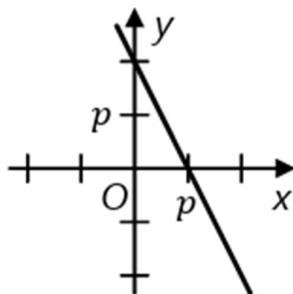
$$y = 2 - x$$

20 Který z následujících grafů je pro vhodné kladné číslo p grafem funkce h v kartézské soustavě souřadnic Oxy?

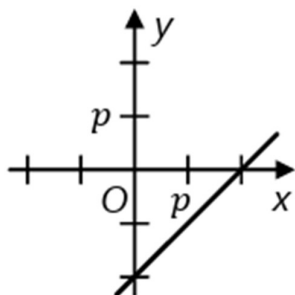
A)



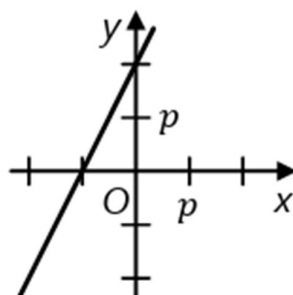
B)



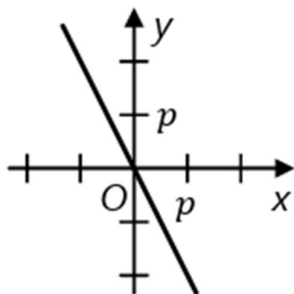
C)



D)



E)



Řešení

Určíme průsečíky funkce $y = 2 - x$ s osami x, y :

S osou x : $y = 0 \Rightarrow x = 2$

S osou y : $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Funkce je klesající, správná odpověď je A, $p = 2$.

Výsledek: A, 2 body

Jaro 2023

7 Je dán výraz:

$$\log_2(8^{-x})$$

Určete všechna $x \in R$, pro která je hodnota daného výrazu rovna osmi.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\log_2(8^{-x}) = 8$$

$$8^{-x} = 2^8$$

$$(2^3)^{-x} = 2^8$$

$$2^{-3x} = 2^8$$

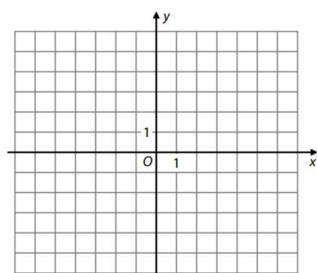
$$-3x = 8$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Výsledek: $x = -\frac{8}{3}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Grafem funkce $h: y = \frac{3}{x-2} - 4$ je hyperbola se středem S (bod S je průsečík asymptot). Graf lineární funkce f prochází bodem $R = [-5; 1]$ a bodem S .



8

8.1 Určete obě souřadnice středu S .

8.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf lineární funkce f .

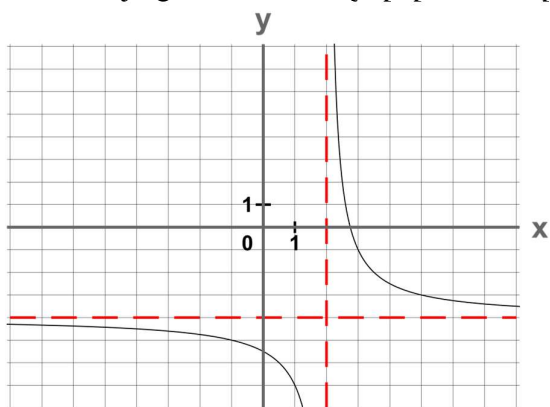
V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení

8.1

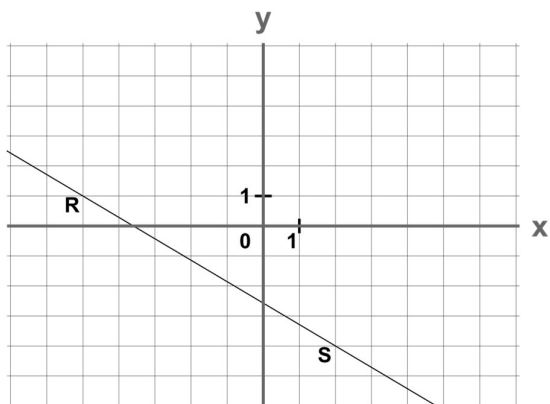
$$h: y = \frac{3}{x-2} - 4$$

Jak sestrojit graf této funkce je popsáno v kapitole Státní maturita/Funkce/Lineární lomená funkce.



Průsečík asymptot je v bodě $S = [2; -4]$.

8.2



Výsledek: 8.1 $S = [2; -4]$, 8.2 Graf, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOHÁM 9–10

Pro $x \in \mathbb{R}$ je dána funkce:

$$g: y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

9 Vypočítejte obě souřadnice průsečíku P grafu funkce g se souřadnicovou osou y .

10 Určete nejmenší kladné číslo x , pro které platí:

$$\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1$$

Řešení

9

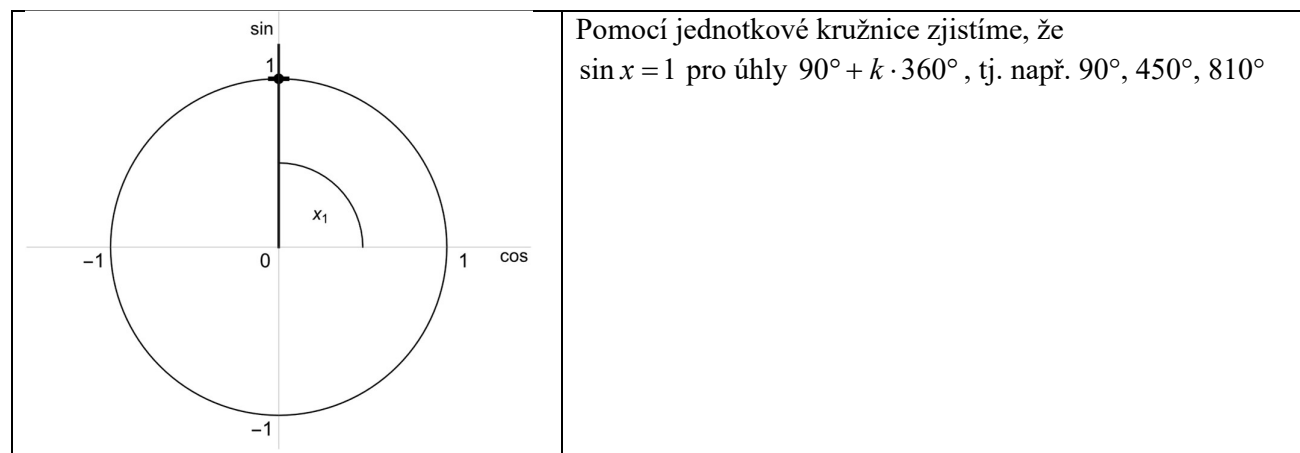
Jednodušší je počítat ve stupních, pro převod stupňů na radiány platí: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

Průsečík s osou y : dosadíme $x = 0$ a vypočítáme y .

$$y = \sin\left(0 + \frac{7\pi}{6}\right) = \sin \frac{7 \cdot 180^\circ}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$P = \left[0; -\frac{1}{2}\right]$$

10



Výraz $\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$ převedeme na stupně: $\sin\left(x + \frac{7 \cdot 180^\circ}{6}\right) = \sin(x + 210^\circ)$

Protože hodnota x má být nejmenší kladné číslo, tak vyhovuje pouze $\sin 450^\circ$

$$x + 210^\circ = 450^\circ$$

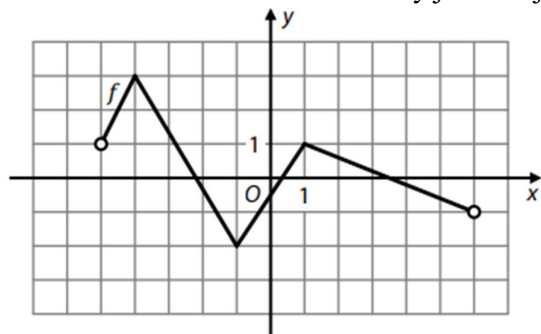
$$x = 240^\circ$$

Výsledek: 9 $P = \left[0; -\frac{1}{2}\right]$, **1 bod, 10** $x = 240^\circ$ nebo $x = \frac{4\pi}{3}$, **max. 2 body**

Podzim 2022

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce f s definičním oborem $(-5; 6)$.



(Vrcholy lomené čáry jsou v mřížových bodech.)

3 Zapište obor hodnot funkce f .

Řešení

Obor hodnot funkce f neboli obor funkčních hodnot je interval „od nejmenší hodnoty y po největší“, proto $y \in \langle -2; 3 \rangle$

Výsledek: $H_f = \langle -2; 3 \rangle$, 1 bod

17 V intervalu $(0; 2\pi)$ je řešena rovnice:

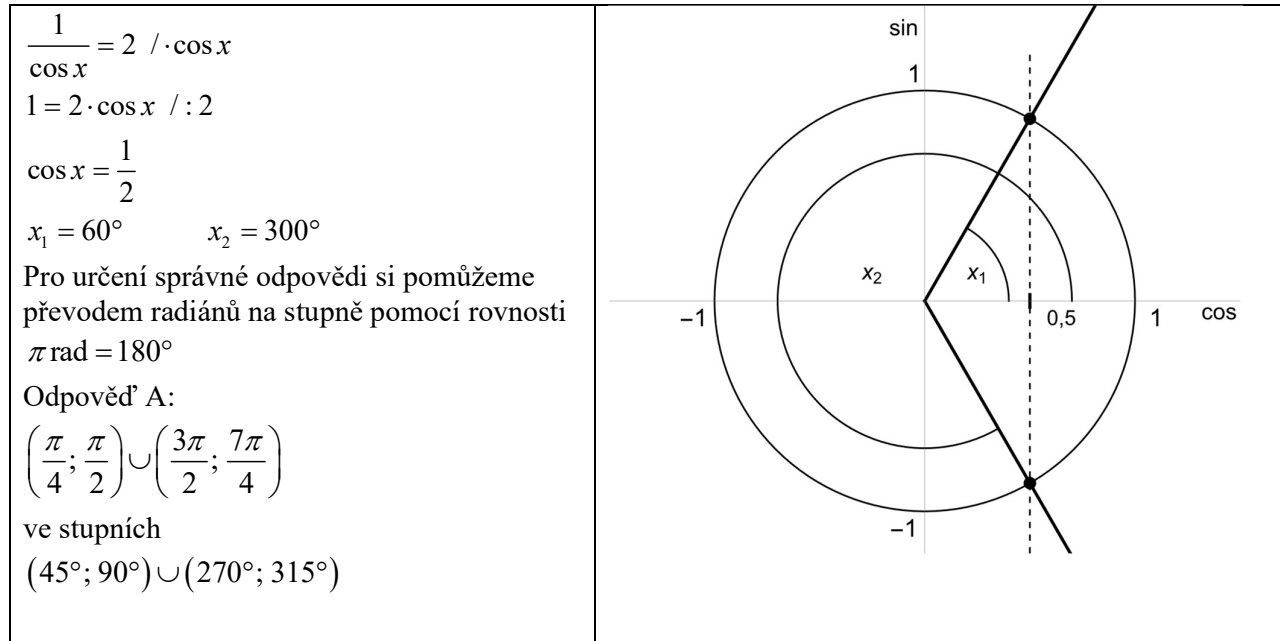
$$\frac{1}{\cos x} = 2$$

Která z množin obsahuje všechna řešení dané rovnice?

- A) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ C) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$
 D) $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ E) žádná z uvedených množin

Řešení

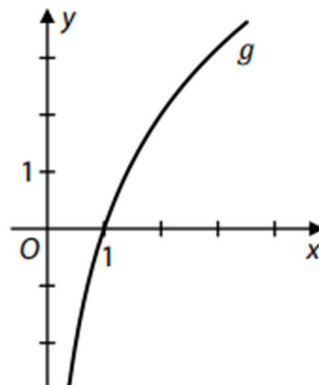
Jedná se o goniometrickou rovnici, kterou řešíme pomocí jednotkové kružnice.



Výsledek: A, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce $g: y = \log_a x$ s definičním oborem $(0; +\infty)$, pro kterou platí:
 $\log_a 2 = 2$



18 Která z následujících rovností platí pro funkci g ?

- A) $\log_a \sqrt{2} = \sqrt{2}$ B) $\log_a \sqrt{8} = \sqrt{8}$ C) $\log_a 4 = 4$ D) $\log_a 8 = 8$ E) žádná z uvedených rovností

Řešení

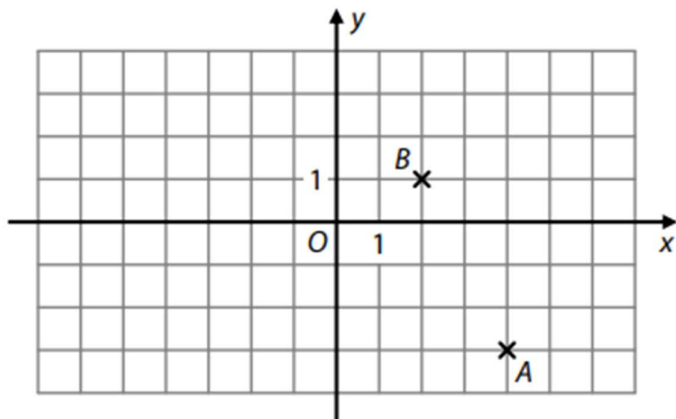
$$\log_a 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

Správnou odpověď určíme pomocí kalkulačky.

Výsledek: C, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou vyznačeny dva mřížové body A , B . Grafem funkce h je parabola s vrcholem A procházející bodem B .



19 Jaký je předpis funkce h ?

- A) $y = -2x + 5$ B) $y = x^2 - 8x + 13$ C) $y = -x^2 + 4x - 3$ D) $y = \frac{x-1}{3-x}$ E) $y = \frac{3x-9}{x-5}$

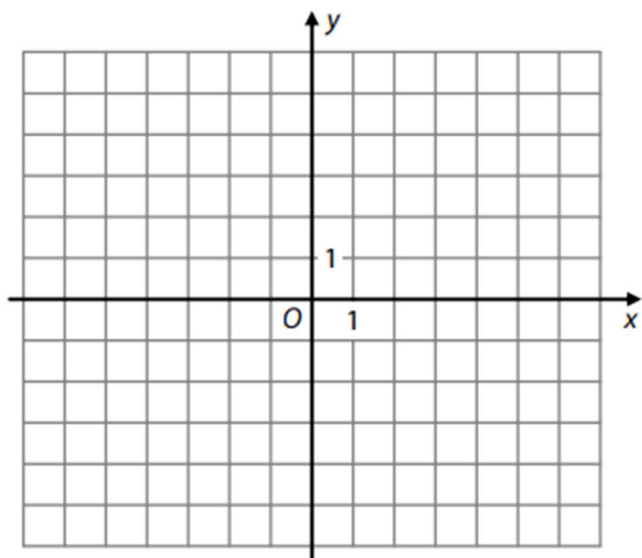
Řešení

Parabola je grafem kvadratické funkce, z grafu vyplývá, že parabola bude otevřená nahoru, tomu vyhovuje pouze odpověď B.

Výsledek: B, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Funkce $f: y = \frac{3}{x-1}$ je definována pro všechna přípustná $x \in \mathbf{R}$.



8

8.1 Určete obě souřadnice průsečíku $P[p_1; p_2]$ grafu funkce f se souřadnicovou osou y .

8.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce f . Na grafu funkce vyznačte alespoň tři mřížové body.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení

8.1

Průsečík s osou y : dosadíme $x = 0$ a vypočítáme y .

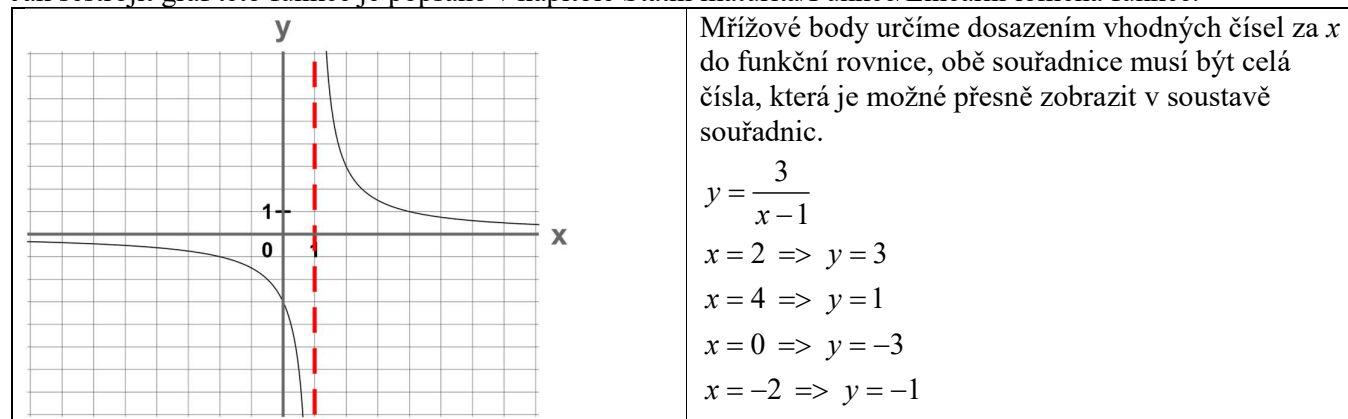
$$f: y = \frac{3}{x-1}$$

$$y = \frac{3}{0-1} = -3$$

$$P[0; -3]$$

8.2

Jak sestavit graf této funkce je popsáno v kapitole Státní maturita/Funkce/Lineární lomená funkce.



Výsledek: 8.1 $P[0; -3]$, 8.2 graf procházející mřížovými body, max. 2 body

9 Funkce $g: y = x(x-36)$ je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Vrcholem grafu funkce g je bod $V[v_1; v_2]$.

Určete první souřadnici v_1 vrcholu V .

Řešení

$$g: y = x(x-36)$$

$$0 = x(x-36)$$

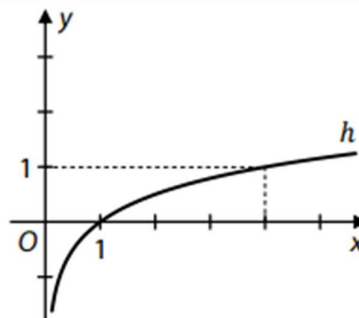
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 36$$

$$x_0 = 18$$

Výsledek: $v_1 = 18$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf logaritmické funkce $h: y = \log_a x$, jejímž definičním oborem je interval $(0; +\infty)$.



10 Určete

10.1 základ a logaritmické funkce h ,

10.2 hodnotu proměnné x , pro kterou $h(x) = 3$.

Řešení

10.1

Graf prochází bodem $[4;1]$

$$y = \log_a x$$

$$1 = \log_a 4$$

$$4 = a^1$$

$$a = 4$$

10.2

$$y = \log_4 x$$

$$3 = \log_4 x$$

$$x = 4^3$$

$$x = 64$$

Výsledek: 10. 1 $a = 4$, 10.2 $x = 64$, max. 2 body

22 Pro $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ platí:

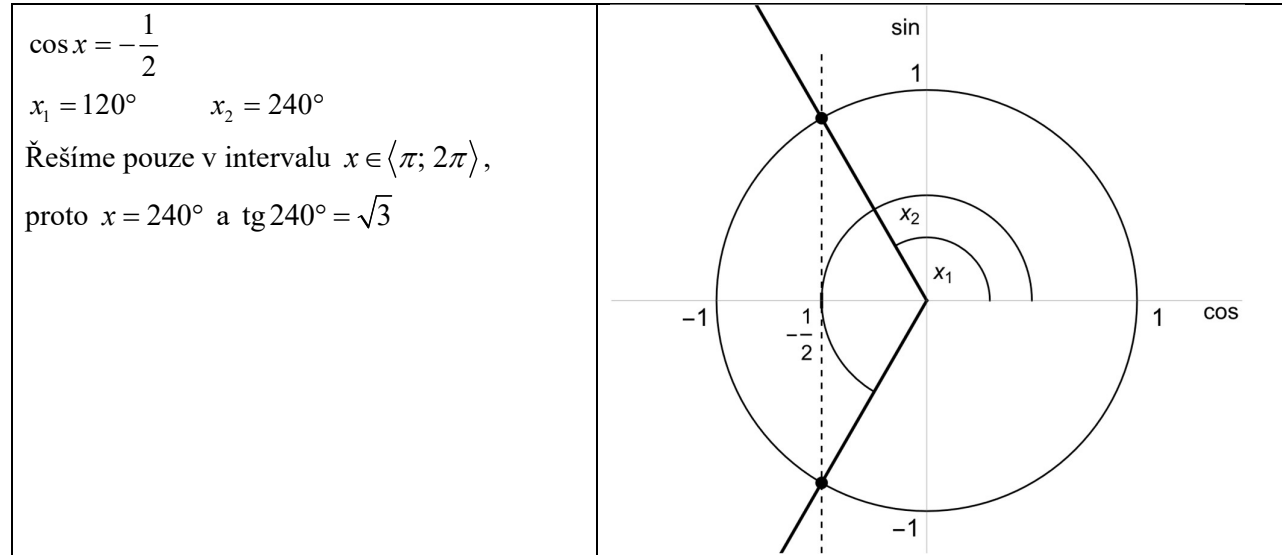
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Jaká je hodnota $\operatorname{tg} x$?

- A) hodnota neexistuje B) $-\sqrt{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

Řešení

Jedná se o goniometrickou rovnici, kterou řešíme pomocí jednotkové kružnice.



Výsledek: E, 2 body

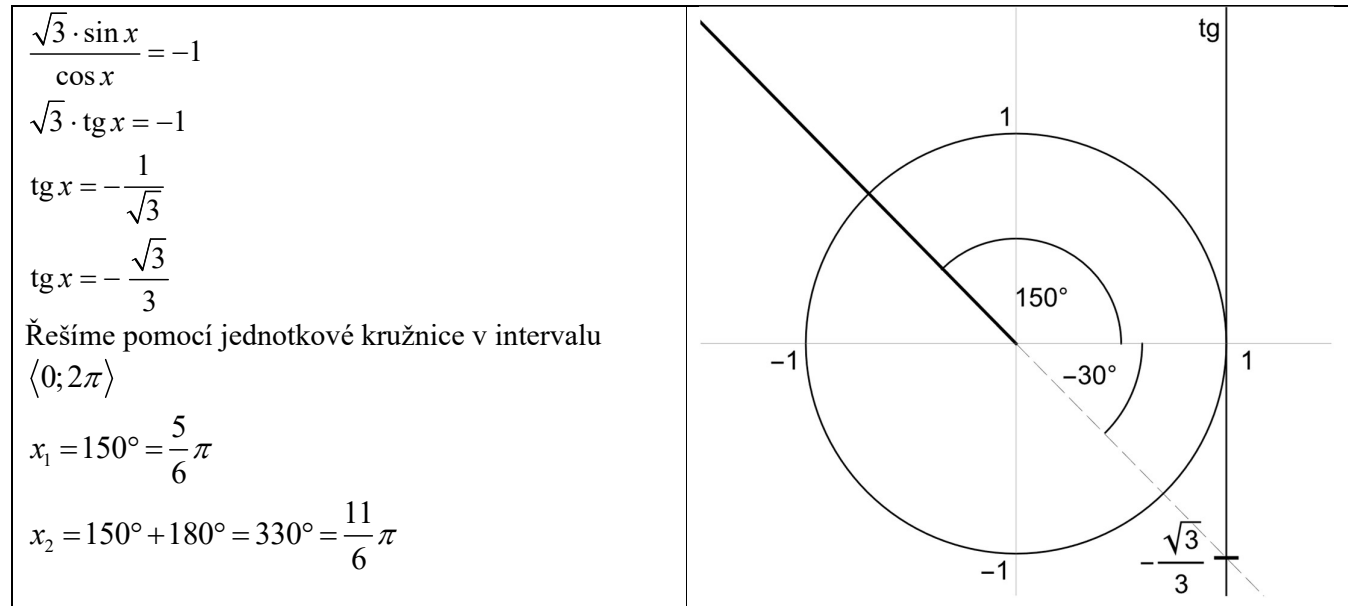
Podzim 2021

8 V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = -1$$

Řešení

Použijeme vzorec $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

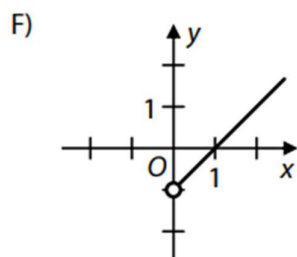
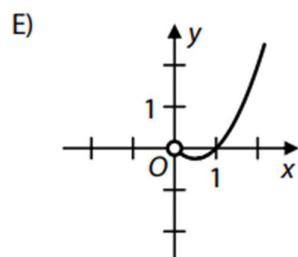
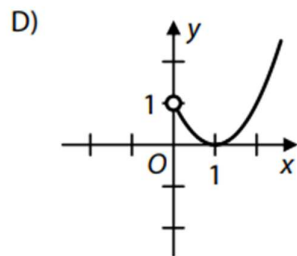
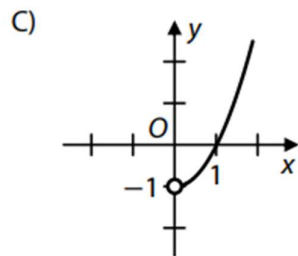
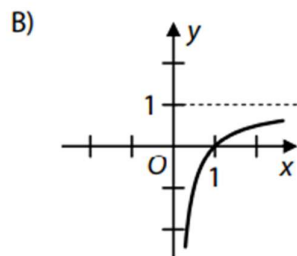
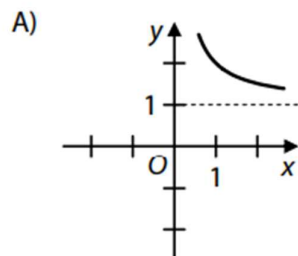


Výsledek: $x_1 = \frac{5\pi}{6}; x_2 = \frac{11\pi}{6}$, uznává se i $x_1 = 150^\circ; x_2 = 330^\circ$ max. 2 body

25 Každou z následujících funkcí (25.1-25.4) definujeme pro $x \in (0; \infty)$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

25.1 $y = \frac{x^2 - x}{x}$ 25.2 $y = \frac{x^3 - x}{x}$ 25.3 $y = \frac{x^2 - x}{x^2}$ 25.4 $y = (x^2 - x) \cdot \log_4 4$



Řešení

Nejprve si jednotlivé funkční rovnice upravíme:

25.1 $y = \frac{x^2 - x}{x} \quad x \neq 0$ $y = \frac{x(x-1)}{x}$ $y = x - 1$ Lineární funkce, $x \neq 0$ F	25.2 $y = \frac{x^3 - x}{x} \quad x \neq 0$ $y = \frac{x(x^2 - 1)}{x}$ $y = x^2 - 1$ Kvadratická funkce s vrcholem v bodě $[0; -1]$, $x \neq 0$ C	25.3 $y = \frac{x^2 - x}{x^2} \quad x \neq 0$ $y = \frac{x(x-1)}{x^2}$ $y = \frac{x-1}{x}$ $y = 1 - \frac{1}{x}$ $y = \frac{-1}{x} + 1$ Hyperbola, $k = -1$ B	25.4 $y = (x^2 - x) \cdot \log_4 4$ $y = (x^2 - x) \cdot 1$ $y = x^2 - x$ $y = x(x-1)$ Parabola, průsečíky s osou x jsou 0, -1 E
--	--	---	--

Výsledek: F C B E, max. 4 body

Mimořádný termín červenec 2021

8 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x+2} \cdot \frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$$

Řešení

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x+2} \cdot \frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{x+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3(x+2)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+6-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^1$$

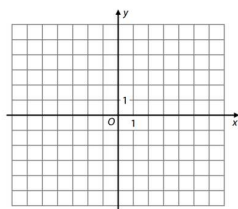
$$3x + 6 - x = 1$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

Výsledek: $x = -2,5$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Graf kvadratické funkce f s definičním oborem $\mathbb{R}$ má vrchol $V[-3;4]$ a prochází bodem $A[-5;0]$.



9

9.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce f a vyznačte průsečíky grafu se souřadnicovými osami x , y .

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

9.2 Zapište obor hodnot funkce f .

Řešení

9.1

Protože vrchol paraboly má souřadnice $V[-3;4]$, tak parabola je souměrná podle přímky, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem $[-3;4]$.

Bod $A[-5;0]$ je průsečík paraboly s osou x , protože y -ová souřadnice je rovna 0. Vzhledem k souměrnosti paraboly podle přímky o rovnici $x = -3$ je druhým průsečíkem přímky s osou x bod $[-1; 0]$.

Pro určení průsečíku funkce s osou y musíme nejprve určit funkční rovnici. Použijeme postup, který je popsán v kapitole Státní maturita/Funkce/Kvadratická funkce/Jak určit funkční rovnici z grafu.

Průsečíky s osou x: $x_1 = -5$ $x_2 = -1$ Funkční rovnici kvadratické funkce lze vyjádřit ve tvaru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ Dosadíme průsečíky s osou x: $y = a(x + 5)(x + 1)$ Dosadíme bod, který leží na parabole: $V[-3;4]: 4 = a(-3 + 5)(-3 + 1)$ $4 = -4a$ $a = -1$ Funkční rovnice kvadratické funkce: $y = -(x + 5)(x + 1)$ Průsečík s osou y $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow \text{Průsečík s osou } y: [0; -5]$	Graf funkce
---	--------------------

9.2

Z grafu určíme $y \in (-\infty; 4]$

Výsledek: 9.1 Graf, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami musí být zobrazeny, a to přesně.

9.2 $y \in (-\infty; 4]$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Jsou dány funkce f, g s definičními obory $\mathbb{R}$.

$$f : y = -2 - x$$

$$g : y = -2x$$

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 $f(1) < g(1)$

16.2 Funkce f je rostoucí.

16.3 Funkce g je konstantní.

16.4 Grafy funkcí f a g mají společný bod $P[2; -4]$

Řešení

16.1 stačí dosadit $x = 1$ do obou funkčních rovnic a porovnat výsledky **A**

16.2 $f : y = -x - 2$, koeficient a je záporný $\Rightarrow$ funkce je klesající **N**

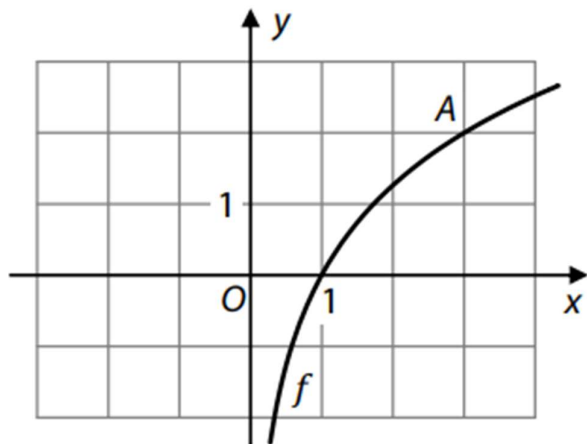
16.3 funkce $g : y = -2x$ je lineární, ne konstantní **N**

16.4 hodnoty $x = 2$ a $y = -4$ vyhovují oběma funkčním rovnicím **A**

Výsledek: ANNA, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Logaritmická funkce $f : y = \log_a x$ s definičním oborem $(0; +\infty)$ je dána grafem. Graf prochází mřížovým bodem A .



17 Jaká je hodnota základu a logaritmické funkce f ?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{3}$

Řešení

Graf funkce prochází bodem $[3; 2]$

$$f : y = \log_a x$$

$$2 = \log_a 3$$

$$3 = a^2$$

$$a = \sqrt{3}$$

Výsledek: E. 2 body

Jaro 2021**10 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:**

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

Řešení

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

$$2^{5x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$2^{5x} = \frac{1}{2}$$

$$2^{5x} = 2^{-1}$$

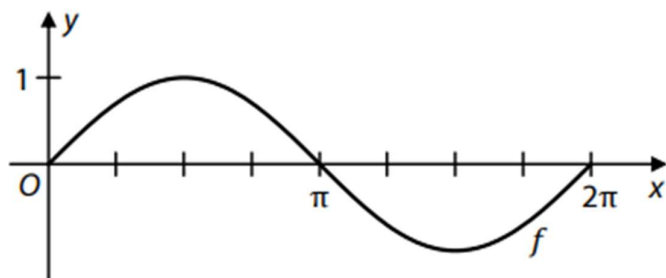
$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Výsledek: $x = -\frac{1}{5}$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce $f : y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



11 Vypočtěte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž je $f(x) = -0,5$.

Řešení

Řešíme goniometrickou rovnici $\sin x = -0,5$

$$\sin x = -0,5$$

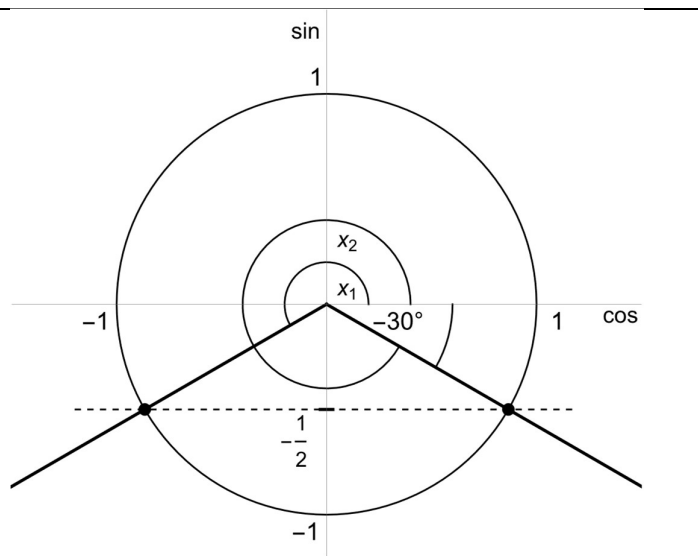
$$x_1 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$x_2 = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

Převod na radiány

$$\frac{210^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$$

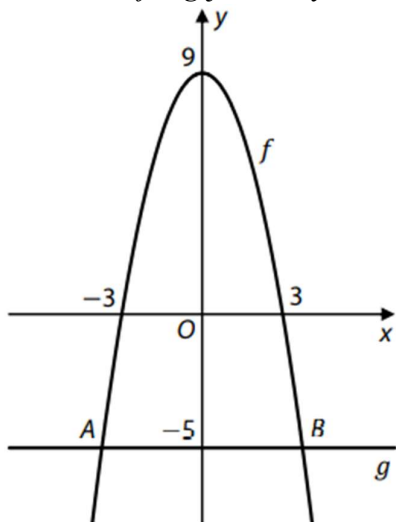
$$\frac{330^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$$



Výsledek: $x_1 = \frac{7\pi}{6}; x_2 = \frac{11\pi}{6}$, uznává se i $x_1 = 210^\circ; x_2 = 330^\circ$ max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf kvadratické funkce f a graf konstantní funkce g . Průsečíky grafů funkcí f a g jsou body A , B .



19 Jaká je vzdálenost bodů A , B ?

- A) $2\sqrt{14}$ B) 7,6 C) $2\sqrt{15}$ D) 8 E) jiná vzdálenost

Řešení

Nejprve určíme funkční rovnici kvadratické funkce f , postup je uveden v kapitole Státní maturita/Funkce/Kvadratická funkce/Jak určit funkční rovnici z grafu.

Funkce f je typu $y = ax^2 + c$, v našem případě $c = 9$. Koeficient a určíme dosazením bodu $[3; 0]$, kterým parabola prochází, do funkční rovnice:

$$0 = a \cdot 3^2 + 9$$

$$-9 = 9a$$

$$a = -1$$

Funkční rovnice kvadratické funkce f je tedy: $y = -x^2 + 9$, funkční rovnice konstantní funkce g je $y = -5$.

Hledáme souřadnice bodů A , B , které jsou průsečíky grafů obou funkcí, řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

$$y = -x^2 + 9$$

$$y = -5$$

$$-5 = -x^2 + 9$$

$$x^2 = 14$$

$$x_1 = \sqrt{14}$$

$$x_2 = -\sqrt{14}$$

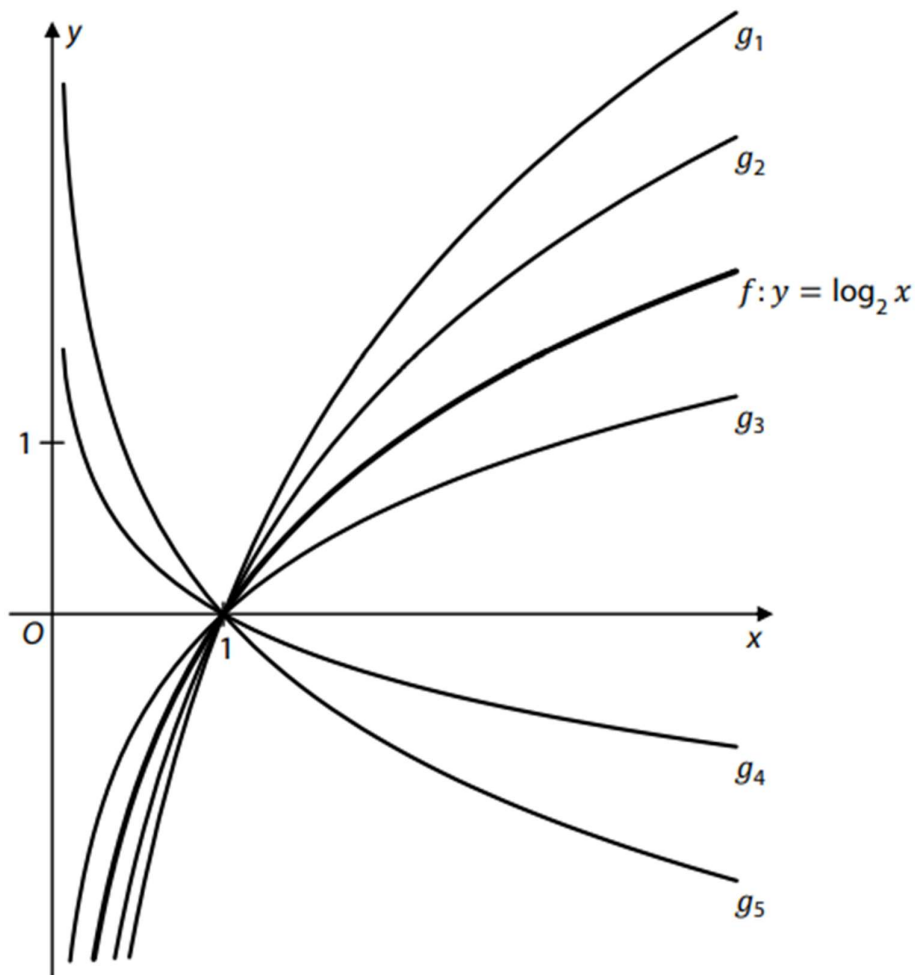
$$A = [-\sqrt{14}; -5] \quad B = [\sqrt{14}; -5]$$

Vzdálenost obou bodů je $2 \cdot \sqrt{14}$.

Výsledek: A, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $f: y = \log_2 x$ a grafy pěti dalších logaritmických funkcí $g_1 - g_5$ s předpisy $y = \log_a x$, v nichž se základy a vzájemně liší. Všechny tyto funkce mají definiční obor $(0; +\infty)$.



20 Kolik z daných funkcí $g_1 - g_5$ má základ menší než 2 (tj. $a < 2$)?

- A) nelze určit B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Řešení

Funkce g_4 a g_5 tuto podmínku splňují, protože to jsou klesající logaritmické funkce a ty mají základ $a \in (0; 1)$.

Jaké další funkce tuto podmínku splňují určíme nejsnáze takto.

Zvolíme si za x vhodné číslo, např. $x = 2$, a určíme funkční hodnotu funkce f : $y = \log_2 2 = 1$.

Nyní spočítáme funkční hodnotu pro totéž x , ale se základem menším než jedna, např. $a = 1,9$:

$y = \log_{1,9} 2 \doteq 1,08$. Tato hodnota je větší než hodnota funkce f pro totéž x , proto vyhovují funkce g_1 a g_2 .

Dohromady tedy vyhovují 4 funkce.

Výsledek: E, 2 body

Podzim 2020

17 Je dán výraz: $\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}}$.

Který z následujících výrazů je pro každé $a \in (1; +\infty)$ ekvivalentní s daným výrazem?

A) 25 B) 12,5 C) $0,2a$ D) $0,5a^{25}$ E) Žádný z uvedených výrazů není s daným výrazem ekvivalentní.

Řešení

Použijeme pravidla pro počítání s logaritmy a rovnost, která platí pro každý základ logaritmu a : $\log_a a = 1$

$$\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}} = \frac{100 \cdot 25 \cdot \log_a a}{100 \cdot \log_5 25} = \frac{25 \cdot \log_a a}{2} = 12,5$$

Výsledek: B, 2 body

25 Každá funkce daná některým z předpisů 25.1–25.4 je definována pro všechna $x \in R \setminus \{0\}$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

$$25.1 \quad y = \frac{2x^3}{x}$$

$$25.2 \quad y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}}$$

$$25.3 \quad y = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x}$$

$$25.4 \quad y = \frac{x^2}{2x^3}$$

- A) přímka různoběžná se souřadnicovými osami
- B) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x
- C) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou y
- D) parabola souměrná podle souřadnicové osy x
- E) parabola souměrná podle souřadnicové osy y
- F) hyperbola

Řešení

Nejprve musíme funkční rovnice upravit

25.1 $y = \frac{2x^3}{x} \quad x \neq 0$ $y = 2x^2$ Kvadratická funkce E	25.2 $y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}} \quad x \neq 0$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$ Lineární funkce A	25.3 $y = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x} \quad x \neq 0$ $y = \sqrt{2}$ Konstantní funkce B	25.4 $y = \frac{x^2}{2x^3} \quad x \neq 0$ $y = \frac{1}{2x}$ Nepřímá úměrnost F
---	--	--	---

Výsledek: E, A, B, F, max. 4 body

26 Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ přiřaďte ke každému výrazu (26.1–26.3) jeho ekvivalentní vyjádření (A–E).

26.1 $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x$ 26.2 $\cos 2x + 1$ 26.3 $\frac{1}{1 + \cot^2 x}$

A) $\sin^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $2 \cdot \sin x$ D) $2 \cdot \sin^2 x$ E) $2 \cdot \cos^2 x$

Řešení

Existují vzorce pro úpravu goniometrických výrazů.

Jednodušší je zvolit si za x úhel z příslušného intervalu, spočítat hodnotu výrazu a pak hledat, která odpověď vyhovuje.

26.1 zvolíme $x = 25^\circ$: $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \sin 50^\circ = 0,3572$, vyhovuje D) $2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot (\sin 25^\circ)^2 = 0,3572$

Atd.

Výsledek: D, E, A, max. 3 body

Jaro 2020

9 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$ je dána funkce $f: y = \log_9(1-x)$.

9.1 Určete definiční obor funkce f .

9.2 Určete, pro které hodnoty proměnné x platí $y = 0,5$.

Řešení

9.1

$$f: y = \log_9(1-x)$$

$$1-x > 0$$

$$-x > -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$x < 1$$

$$x \in (-\infty; 1)$$

9.2

$$f: y = \log_9(1-x)$$

$$0,5 = \log_9(1-x)$$

$$1-x = 9^{0,5}$$

$$-x = 3-1$$

$$x = -2$$

Výsledek: 9.1 $x \in (-\infty; 1)$ **1 bod, 9.2** $x = -2$ **1 bod.**

10 V oboru $\mathbf{R}$ řešte:

$$2^{1000} : 2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$

Řešení

$$2^{1000} : 2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$

$$\frac{2^{1000}}{2^{500}} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$

$$2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$

$$4 \cdot 2^{500} = 2^x$$

$$2^2 \cdot 2^{500} = 2^x$$

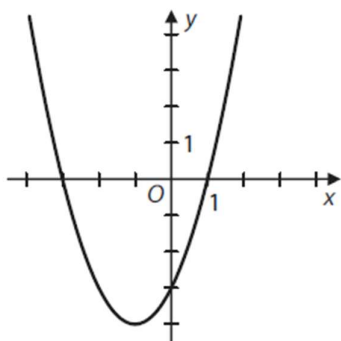
$$2^{502} = 2^x$$

$$x = 502$$

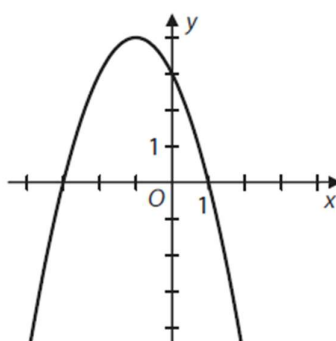
Výsledek: $x = 502$ **1 bod.**

25 Každému z grafů (25.1–25.4) kvadratické funkce přiřaďte odpovídající předpis (A–F).

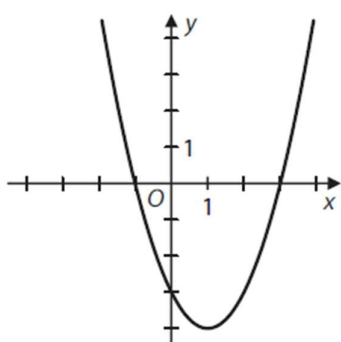
25.1



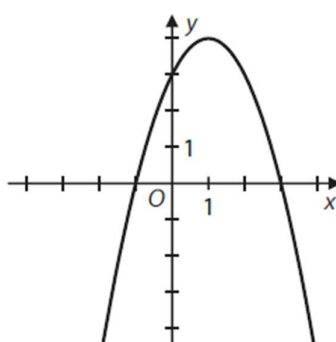
25.2



25.3



25.4



- A) $y = (x - 3)(x + 1)$ B) $y = (x - 3)(x - 1)$ C) $y = (3 - x)(x + 1)$
 D) $y = (x + 3)(x + 1)$ E) $y = (x + 3)(x - 1)$ F) $y = (x + 3)(1 - x)$

Řešení

Pokud známe průsečíky paraboly s osou x , tak funkční rovnici kvadratické funkce můžeme kromě základního tvaru $y = ax^2 + bx + c$ vyjádřit také ve tvaru $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1 a x_2 jsou x -ové hodnoty průsečíků grafu s osou x – více v kapitole

Státní maturita/Funkce/Kvadratická funkce/Jak určit funkční rovnici z grafu.

25.1 tato kvadratická funkce musí mít rovnici $y = a(x - (-3))(x - 1)$ neboli $y = a(x + 3)(x - 1)$, navíc $a > 1$, protože parabola je otočená nahoru. Vyhovuje pouze E.

25.2 tato kvadratická funkce musí mít rovnici $y = a(x - (-3))(x - 1)$ neboli $y = a(x + 3)(x - 1)$, navíc $a < 1$, protože parabola je otočená dolů. Vyhovuje pouze F: $y = (x + 3)(1 - x)$; $y = -(x + 3)(x - 1)$.

25.3 tato kvadratická funkce musí mít rovnici $y = a(x - (-1))(x - 3)$ neboli $y = a(x + 1)(x - 3)$, navíc $a > 1$, protože parabola je otočená nahoru. Vyhovuje pouze A.

25.4 tato kvadratická funkce musí mít rovnici $y = a(x - (-1))(x - 3)$ neboli $y = a(x + 1)(x - 3)$, navíc $a < 1$, protože parabola je otočená dolů. Vyhovuje pouze C: $y = (3 - x)(x + 1)$; $y = -(x - 3)(x + 1)$

Výsledek: E, F, A, C max 4 body.

Podzim 2019

16 Na množině $R \setminus \{-2\}$ je dána funkce $f : y = \frac{2}{x+2}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 Grafem funkce f je hyperbola.

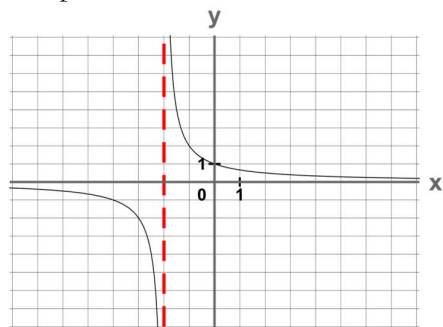
16.2 Graf funkce f protíná obě souřadnicové osy x, y .

16.3 $f(1) = 0$

16.4 Obor hodnot funkce f je $H_f = R \setminus \{0\}$

Řešení

Některé úlohy je možné řešit i bez znalosti grafu, ale všechny ne. Jak sestavit graf této funkce je popsáno v kapitole Státní maturita/Funkce/Lineární lomená funkce.



16.1 A

16.2 z grafu je vidět, že protíná pouze osu y N

16.3 nemusíme znát graf, stačí dosadit do funkční rovnice $y = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$ N

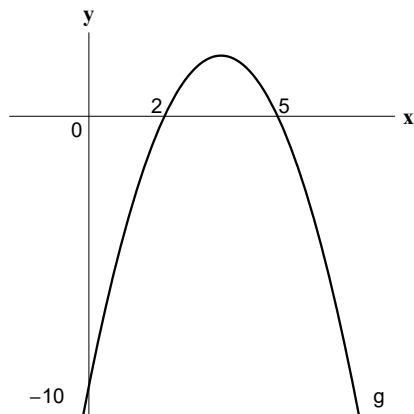
16.4 z grafu je vidět, že

$y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ což je totéž jako $H_f = R \setminus \{0\}$, výraz $R \setminus \{0\}$ znamená všechna reálná čísla kromě 0. A

Výsledek: ANNA, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Kvadratická funkce g s definičním oborem $\mathbf{R}$ je dána grafem.



17 Které z následujících vyjádření je předpisem funkce g ?

A) $y = x^2 + 7x - 10$ B) $y = -x^2 + 7x + 10$ C) $y = -(x+2)(x+5)$

D) $y = (x-2)(x+5)$ E) $y = (x-2)(5-x)$

Řešení

Nejjednodušší metoda: odpovědi A) a D) hned vyloučíme, protože parabola je otevřená dolů a proto $a < 0$. Zbývající předpisy musí vyhovovat všem bodům na grafu: $[2;0]$, $[5;0]$, $[0;-10]$. Vyhovuje pouze E.

Výsledek: E, 2 body

25 Ke každé rovnici (25.1–25.4) řešené v oboru $\mathbb{R}$ přiřaďte interval (B–F), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (A), nemá-li rovnice řešení.

25.1 $\log_{10}(-2x) = 0$ 25.2 $\log_{10} 10^x + x \cdot \log_{10} 1 = \log_{10} 1000$ 25.3 $2^x : 32^{0,5} = \sqrt[3]{32}$ 25.4 $2^{-x} + 2 = 0$

A) $\emptyset$ B) $(-\infty; -2)$ C) $(-2; 0)$ D) $(0; 2)$ E) $(2; 4)$ F) $(4; \infty)$

Řešení

25.1 $\log_{10}(-2x) = 0$ $-2x = 10^0$ $-2x = 1$ $x = -\frac{1}{2}$ C	25.2 $\log_{10} 10^x + x \cdot \log_{10} 1 = \log_{10} 1000$ $x \cdot \log_{10} 10 + x \cdot 0 = 3$ $x \cdot 1 = 3$ $x = 3$ E	25.3 $2^x : 32^{0,5} = \sqrt[3]{32}$ $\frac{2^x}{(2^5)^{0,5}} = \sqrt[3]{2^5}$ $\frac{2^x}{2^{2,5}} = 2^{\frac{5}{3}} / \cdot 2^{2,5}$ $2^x = 2^{\frac{5}{3} + 2,5}$ $2^x = 2^{\frac{25}{6}}$ $x = \frac{25}{6}$ F	25.4 $2^{-x} + 2 = 0$ $2^{-x} = -2$ Mocnina kladného čísla nemůže být záporná, rovnice nemá řešení. A
--	--	---	---

Výsledek: CEFA, max. 4 body

Jaro 2019

- 7 Kvadratická funkce má předpis $y = 2x^2 - 3x$. Její graf protíná přímka p ve dvou různých bodech $P[p_1; 9]$ a $Q[q_1; 9]$.

Vypočtete souřadnice p_1, q_1 bodů P, Q .

Řešení

Jestliže přímka protíná parabolou, pak souřadnice průsečíků musí vyhovovat oběma funkčním rovnicím,

$$y = 2x^2 - 3x$$

$$9 = 2x^2 - 3x$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 81$$

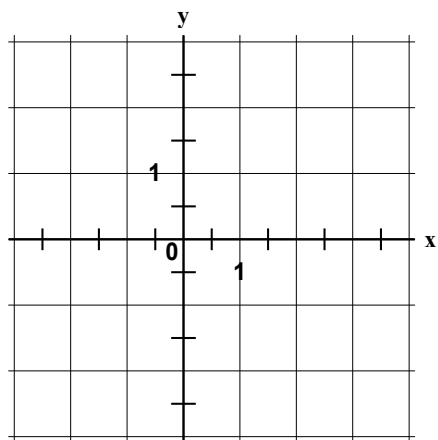
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1,5$$

Výsledek: $p_1 = 3, q_1 = -1,5$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Je dána funkce $f: y = \log_2 x$.



8

8.1 Dopočtete souřadnici a_2 bodu $A[4; a_2]$ grafu funkce f .

8.2 Dopočtete souřadnici b_1 bodu $B[b_1; -1]$ grafu funkce f .

8.3 Sestrojte graf funkce f s přesně vyznačenými body A , B a průsečíkem P grafu funkce f se souřadnicovou osou x .

V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

Řešení

8.1

$$f: y = \log_2 x$$

$$a_2 = \log_2 4$$

$$4 = 2^{a_2}$$

$$a_2 = 2$$

8.2

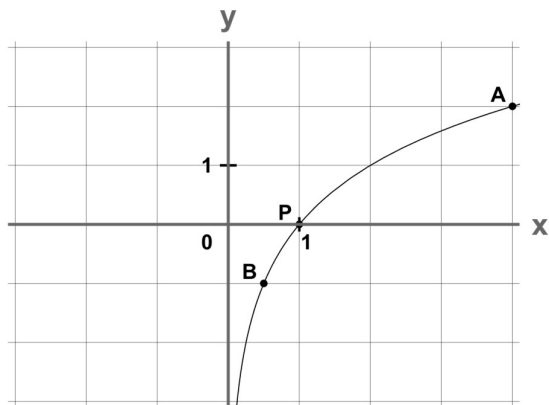
$$f: y = \log_2 x$$

$$-1 = \log_2 b_1$$

$$b_1 = 2^{-1}$$

$$b_1 = 0,5$$

8.3



Výsledek: 8.1 $a_2 = 2$ 1 bod, 8.2 $b_1 = 0,5$ 1 bod, 8.3 Graf s vyznačením bodů A , B , P 1 bod

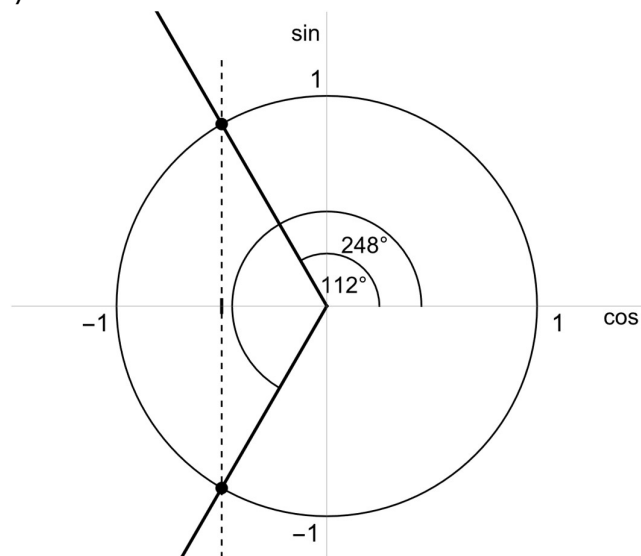
11 Pro dva různé úhly $\alpha = 112^\circ$, $\beta \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ platí $\cos \alpha = \cos \beta$.

Určete ve stupních velikost úhlu β .

Řešení

Je nutné použít jednotkovou kružnici.

$$\beta = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$$



Výsledek: $\beta = 248^\circ$, 1 bod.

12 V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici: $\frac{25^x}{5} = 5 \cdot 5^{x-2}$

Řešení

$$\frac{25^x}{5} = 5 \cdot 5^{x-2} \quad / \cdot 5$$

$$(5^2)^x = 5^1 \cdot 5^{x-2} \cdot 5^1$$

$$5^{2x} = 5^{1+x-2+1}$$

$$2x = x$$

$$x = 0$$

Výsledek: $x = 0$, 1 bod

Podzim 2018

6 Bod A grafu funkce $g : y = 0,75x - 0,5$ má obě souřadnice x, y stejné. Určete souřadnice bodu A .

Řešení

$$g : y = 0,75x - 0,5$$

$$x = 0,75x - 0,5$$

$$-0,25x = -0,5 \quad / : (-0,25)$$

$$x = -2$$

Výsledek: $A[-2; -2]$, **1 bod**

11 Určete souřadnice průsečíku $P[x_0; y_0]$ grafu funkce f se souřadnicovou osou x . $f : y = 4 - 2 \cdot \log_3 x$

Řešení

Pro průsečík s osou x platí $y = 0$

$$f : y = 4 - 2 \cdot \log_3 x$$

$$0 = 4 - 2 \cdot \log_3 x$$

$$2 \cdot \log_3 x = 4 \quad / : 2$$

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^2$$

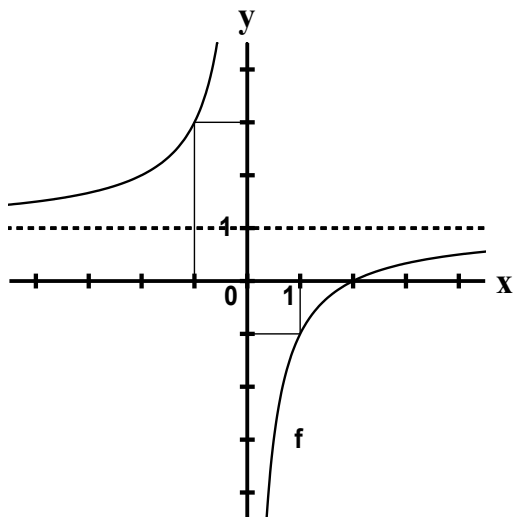
$$x = 9$$

$$P[9; 0]$$

Výsledek: $P[9; 0]$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 24

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf lineární lomené funkce f s definičním oborem $R \setminus \{0\}$.



24 Jaký je předpis funkce f ?

- A) $y = \frac{-2}{x}$ B) $y = \frac{2}{x-2}$ C) $y = \frac{x-2}{x+2}$ D) $y = \frac{x-2}{-x+2}$ E) $y = \frac{x-2}{x}$

Řešení

Graf prochází body $[-1; 3]$, $[1; -1]$, $[2; 0]$, souřadnice všech těchto bodů musí vyhovovat funkční rovnici.

Vyhovuje pouze E.

Výsledek: E, 2 body

25 Ke každé z následujících funkcí (25.1–25.4) s definičním oborem R přiřaďte obor hodnot (A–F) dané funkce.

25.1 $y = (x - 3)^2$

25.2 $y = 3 + x^2$

25.3 $y = x - 3$

25.4 $y = 3$

A) R

B) $(-\infty; 0)$

C) $(-\infty; 3)$

D) $(0; \infty)$

E) $(3; \infty)$

F) $\{3\}$

Řešení

25.1 druhá mocnina je vždy kladná nebo rovna nule, D) $(0; \infty)$

25.2 grafem je parabola s vrcholem $V[0; 3]$ otevřená nahoru, E) $(3; \infty)$

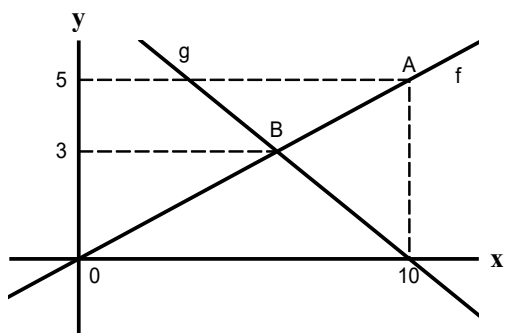
25.3 lineární funkce, A) R

25.4 konstantní funkce F) $\{3\}$

Výsledek: DEAF, max. 4 body

Jaro 2018**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 6 – 7**

Grafy funkcí f a g jsou přímky. Graf funkce f prochází počátkem O a bodem A . Grafy funkcí f a g se protínají v bodě B .



6 Zapište předpis funkce f .

7 Zapište obecnou rovnici přímky, která je grafem funkce g .

Řešení

6

Přímá úměrnost, funkční rovnice má tvar $y = ax$, prochází bodem $[10;5]$

$$y = ax$$

$$5 = a \cdot 10$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

7

Nejprve určíme souřadnice bodu B . Leží na přímce f , která má rovnici $y = \frac{1}{2}x$, $y = 3 \Rightarrow x = 6$.

Přímka g tedy prochází body $[6;3]$ a $[10;0]$. Určíme nejprve funkční rovnici lineární funkce.

$$y = ax + b$$

$$3 = 6a + b \quad / \cdot (-1)$$

$$0 = 10a + b$$

$$-3 = -6a - b$$

$$0 = 10a + b$$

$$-3 = 4a$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$b = -10a = -10 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{30}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{30}{4}$$

Obecná rovnice přímky má ale tvar $ax + by + c = 0$, proto musíme rovnici upravit:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{30}{4} \quad / \cdot 4$$

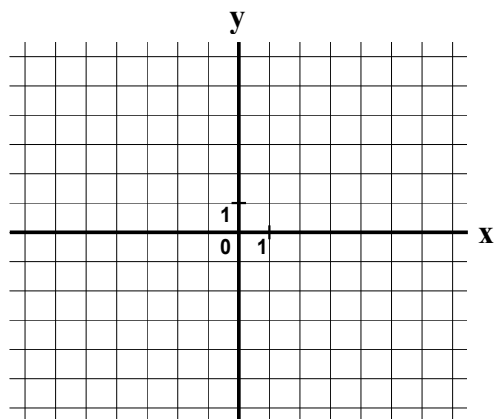
$$4y = -3x + 30$$

$$3x + 4y - 30 = 0$$

Výsledek: 6 $f: y = \frac{1}{2}x$ **1 bod, 7** $3x + 4y - 30 = 0$ **max. 2 body**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Graf kvadratické funkce f prochází body $A[-5; 0]$, $B[-4; 3]$, $C[-3; 4]$. Osa souměrnosti o grafu kvadratické funkce f je určena rovnicí $x = -3$.



8

8.1 Zapište souřadnice vrcholu $V[x; y]$ grafu funkce f .

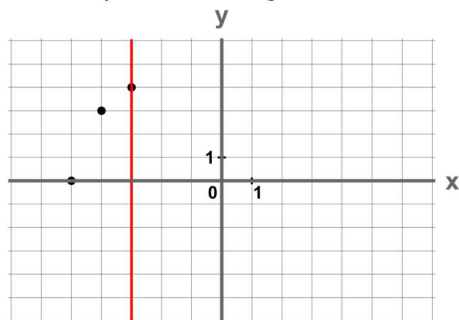
8.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce f . V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

8.3 Zapište obor hodnot funkce f .

Řešení

8.1

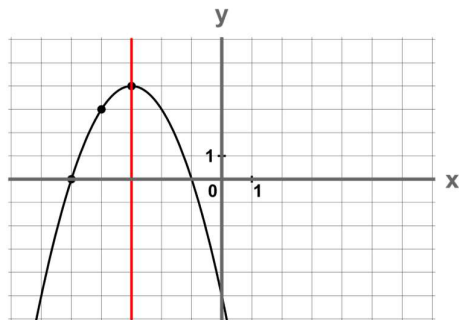
Vše si vyznačíme do grafu



Z grafu je patrné, že vrcholem paraboly je bod $C \Rightarrow V[-3; 4]$

8.2

Využijeme souměrnost paraboly podle přímky s rovnicí $x = -3$



8.3

Z grafu vidíme, že $y \in (-\infty; 4]$

Výsledek: 8.1 $V[-3; 4]$ 1 bod, 8.2 graf 1 bod, 8.3 $y \in (-\infty; 4]$

25 Ke každé rovnici (25.1-25.4) řešené v oboru $\mathbb{R}$ přiřadte interval (A-F), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení.

$$25.1 \quad 3^{2x} = 9^{-x} \qquad 25.2 \quad 2^{2x} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2} \qquad 25.3 \quad \log(x-2) = \log(1-x) \qquad 25.4 \quad 2 \cdot \log x = 1$$

A) $(-\infty; -1\rangle$ B) $(-1; 1\rangle$ C) $(1; 2\rangle$ D) $(2; 3\rangle$ E) $(3; \infty)$ F) $\emptyset$

Řešení

25.1

$$3^{2x} = 9^{-x}$$

$$3^{2x} = (3^2)^{-x}$$

$$3^{2x} = 3^{-2x}$$

$$2x = -2x$$

$$x = 0$$

B

25.2

$$2^{2x} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$2^{2x+(-x)} = 2^{-1}$$

$$2x + (-x) = -1$$

$$x = -1$$

A

25.3

$$\log(x-2) = \log(1-x)$$

$$x-2 = 1-x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{pro toto } x \text{ je logaritmovaný výraz záporný}$$

$$x \in \emptyset$$

F

25.4

$$2 \cdot \log x = 1$$

$$\log x = \frac{1}{2}$$

$$x = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{10}$$

E

Výsledek: BAFE, max. 4 body

Podzim 2017

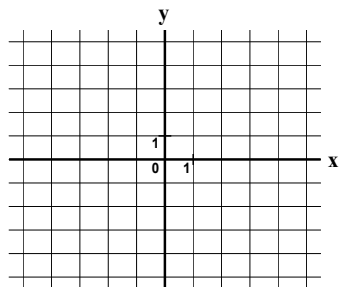
7 Pro všechna $x, y \in (0; \infty)$ platí:

$$\log y = 2 \log x + 2$$

Vyjádřete proměnnou y tak, aby zápis neobsahoval logaritmy.

Výsledek: $y = 100x^2$, 1 bod

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 8



8 Funkce $f: y = -\frac{2}{x}$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8.1 Sestrojte graf funkce f . Graf musí procházet body $A[-1; \quad]$, $B[1; \quad]$, $C[2; \quad]$, jejichž chybějící souřadnice dopočtete.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

8.2 Zapište všechna x , pro něž je hodnota funkce f záporná ($y < 0$).

Výsledek: **hyperbola s body** $A[-1; 2]$, $B[1; -2]$, $C[2; -1]$, $x \in (0; \infty)$, **max. 2 body**

12 Funkce $f: y = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Z množiny $M = \left\{-\frac{9}{4}; -1; 0; \frac{4}{9}; \frac{3}{2}; 3\right\}$ vypište všechna čísla, která patří do oboru hodnot funkce f .

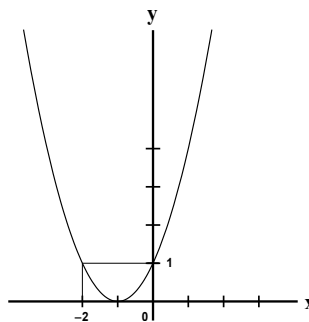
Výsledek: $\frac{4}{9}; \frac{3}{2}; 3$, 1 bod.

13 Řešte rovnici s neznámou $x \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$: $\operatorname{tg} x = -1$.

Výsledek: **135° , 315° , max. 2 body**

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 24

Grafem funkce f je parabola ($D_f = \mathbb{R}$).



24 Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A) Graf funkce f je souměrný podle přímky $p: x - 1 = 0$

B) Funkce f má předpis $y = (x + 1)^2$

C) Funkce f je klesající v intervalu $(-\infty; 0)$

D) Obor hodnot funkce f je interval $(0; \infty)$

E) $f(0) = -1$

Výsledek: **B, 2 body**

Jaro 2017**12 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:**

$$\log_3 3x = 6$$

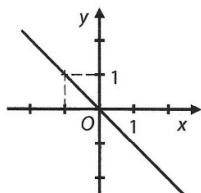
Výsledek: $x = 243$, 1 bod**13 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:**

$$3 \cdot 9^x - 9^x = 6$$

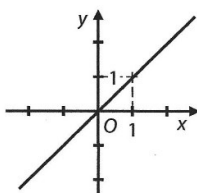
Výsledek: $x = \frac{1}{2}$, 1 bod**16** Grafem kvadratické funkce $f: y = 9 - x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$ je parabola.**Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).**16.1 Vrchol paraboly je $V[0; 9]$ 16.2 Jeden z průsečíků paraboly se souřadnicovými osami je $P[-3; 0]$ 16.3 $f(0) = -3$ 16.4 Obor hodnot funkce f je $H_f = \langle 9; +\infty \rangle$ **Výsledek: A A N N, max. 2 body****25** Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.5–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

$$25.1 \ y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \qquad 25.1 \ y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \qquad 25.1 \ y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \qquad 25.1 \ y = x + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

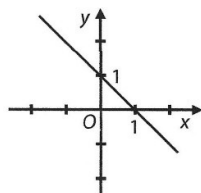
A)



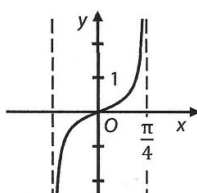
B)



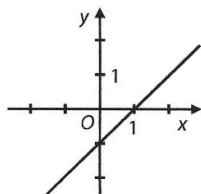
C)



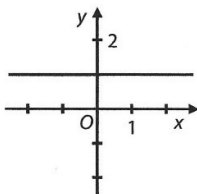
D)



E)

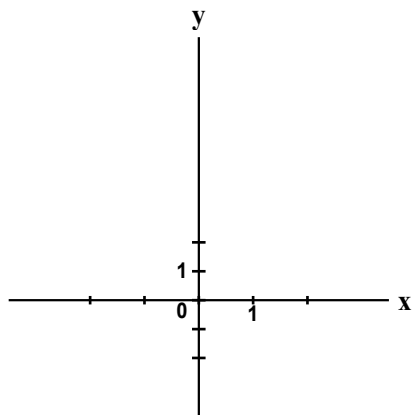


F)

**Výsledek: F A B E, max. 4 body**

Podzim 2016**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6**

Je dána funkce f s předpisem $y = x^2$ a definičním oborem $D_f = \langle -2; 3 \rangle$.

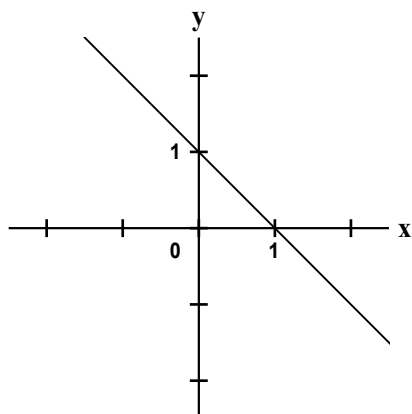


6 Zapište obor hodnot funkce f .

Výsledek: $H_f = \langle 0; 9 \rangle$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 7

Grafem funkce g je přímka.



7 Zapište předpis funkce g .

Výsledek: $g: y = -x + 1$, 1 bod

14 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $16 \cdot 2^{x+1} = 4 \cdot 8^x$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Výsledek: $K = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$, max. 2 body

25 Přiřaďte ke každé rovnici (25.1 – 25.4) její řešení (A – F) v oboru $\mathbb{R}$.

25.1 $\operatorname{tg} x = 0$ 25.2 $\cos x = 1$ 25.3 $\sin 2x = 0$ 25.4 $\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = 1$

A) $x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ B) $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$ C) $x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

E) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ F) $x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Výsledek: B, C, A, E, max. 4 body

Jaro 2016

15 Pro $x \in \mathbb{R}$ určete definiční obor rovnice (podmínky) a rovnici vyřešte.

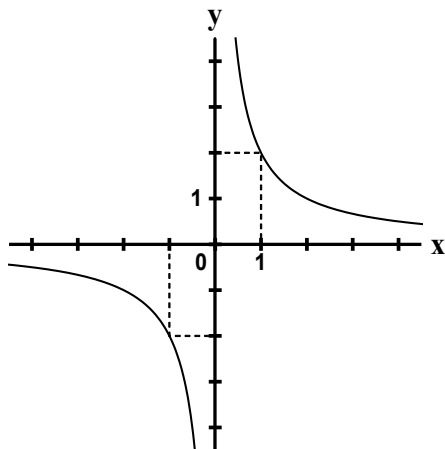
$$\log 8 - \log 2 = \frac{\log(2x - 2)}{2}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

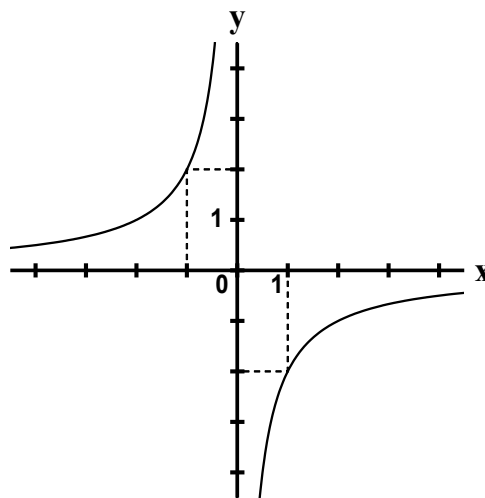
Výsledek: $x \in (1; \infty)$, $K = \{9\}$, max. 3 body

25 Přiřaďte ke každému grafu funkce (25.1 – 25.4) odpovídající předpis funkce (A – F).

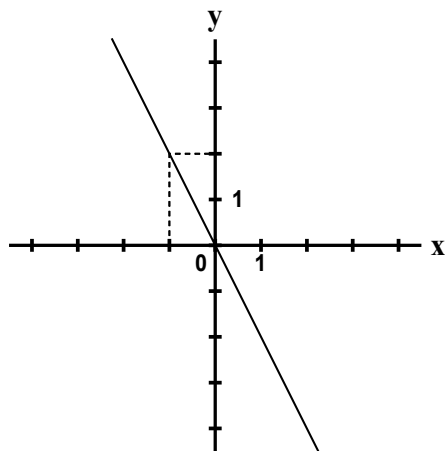
25.1



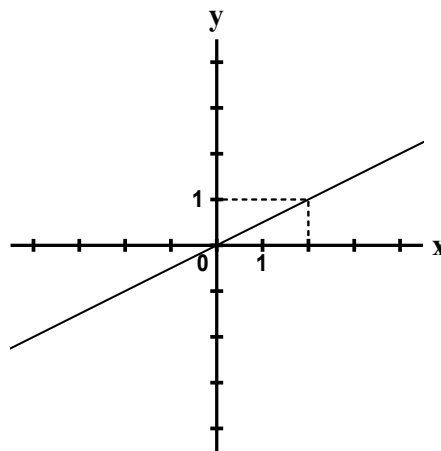
25.2



25.3



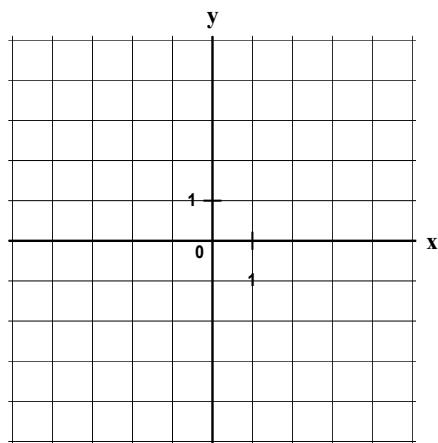
25.4



A) $y = \frac{2}{x^{-1}}$ B) $y = \frac{-x}{2^{-1}}$ C) $y = 2^{-1} \cdot x$ D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$ E) $y = -2 \cdot x^{-1}$ F) $y = -2^{-1} \cdot x^{-1}$

Výsledek: D, E, B, C, max. 4 body

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 8



8 Funkce f s definičním oborem $\mathbf{R}$ má předpis $y = 4 - 2x$.

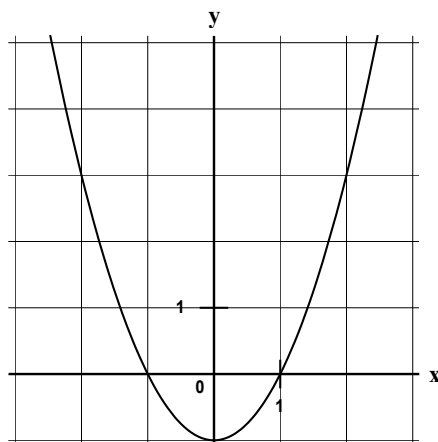
8.1 Sestrojte graf funkce. V záznamovém archu obtáhněte graf propisovací tužkou.

8.2 Graf lineární funkce g s definičním oborem $\mathbf{R}$ prochází počátkem O kartézské soustavy souřadnic Oxy a s grafem funkce f nemá žádný společný bod. Zapište předpis funkce g .

Výsledek: 8.2 $g: y = -2x$, max. 2 body

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce $f: y = x^2 - 1$ pro $x \in \mathbf{R}$



11 Určete všechny hodnoty proměnné x , pro něž je $f(x) \leq 3$.

Výsledek: $x \in \langle -2; 2 \rangle$, 1 bod

25 Přiřaďte ke každé rovnici (25.1-25.4) řešení v oboru $\mathbf{R}$ odpovídající množinu všech řešení (A-F).

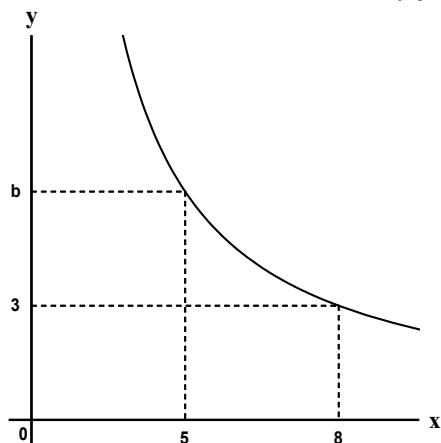
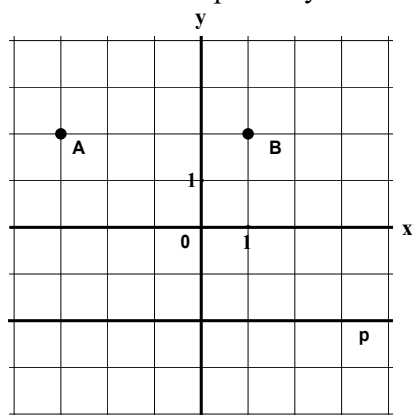
25.1 $2^x = \frac{1}{2}$ 25.2 $2^x = 0$ 25.3 $\log_2 x = -1$ 25.4 $\log_2 x^2 = 0$

A) $\{-2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ D) $\{1\}$ E) $\emptyset$ F) jiná množina

Výsledek: B, E, C, F, max. 4 body

Jaro 2015**6** Určete definiční obor a řešení rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$\log(2-x) = -1$$

Výsledek: $D(x) = (-\infty; 2)$; $K = \{1, 9\}$, max. 2 body**7** V soustavě souřadnic Oxy je sestrojena část grafu nepřímé úměrnosti.Vypočtěte hodnotu b .**Výsledek:** $\frac{24}{5}$, 1 bod**8** Grafem kvadratické funkce f s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ je parabola, která prochází mřížovými body A a B . Vrchol V paraboly leží na přímce p .8.1 Sestrojte graf funkce f . V záznamovém archu graf obtáhněte propisovací tužkou.8.2 Zapište souřadnice vrcholu V grafu funkce f .8.3 Zapište obor hodnot funkce f .**Výsledek:** 8.1 graf; 8.2 $V = [-1; -2]$, 8.3 $H(f) = \langle -2; \infty \rangle$, max. 3 body**16** Rozhodněte u každé z následujících rovnic (16.1-16.4), zda má pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ právě dvě řešení (A), či nikoli (N).

$$16.1 \sin x = \frac{1}{2} \quad 16.2 \sin x = \frac{3}{2} \quad 16.3 \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 16.4 \sin x = -1$$

Výsledek: A, N, A, N, max. 2 body

Ilustrační 2015

7 Pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ řešte rovnici: $\sin x = \frac{1}{2}$

Výsledek: $K = \{30^\circ; 150^\circ\}$, 1 bod

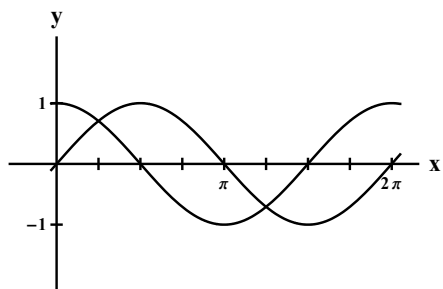
25 Přiřaďte ke každé rovnici řešené v oboru $\mathbf{R}$ (25.1-25.4) odpovídající množinu řešení (A-F).

25.1 $2^{x-1} = \frac{1}{4}$ 25.2 $2^x = -4$ 25.3 $\log_2 2 + \log_2 1 = \log_2 2x$ 25.4 $\log_2 x^2 - \log_2 x = 1$

A) $\{-2; 2\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{1\}$ E) $\{2\}$ F) $\emptyset$

Výsledek: C; F; D; E, max. 4 body

26 V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou sestrojeny grafy funkcí sinus a kosinus pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



26 Přiřaďte ke každé podmínce (26.1–26.3) interval (A–E), v němž podmínka platí.

26.1 V celém intervalu jsou funkce sinus i kosinus klesající.

26.2 V celém intervalu jsou funkce sinus i kosinus rostoucí.

26.3 V celém intervalu je funkce sinus klesající a funkce kosinus rostoucí.

A) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ C) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ D) $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ E) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Výsledek: C, E, D, max. 3 body

Podzim 2014

8 V oboru $\mathbf{R}$ řešte: $\frac{24+2^x}{4} = 2^x$. V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Výsledek: $x = 3$, max. 2 body

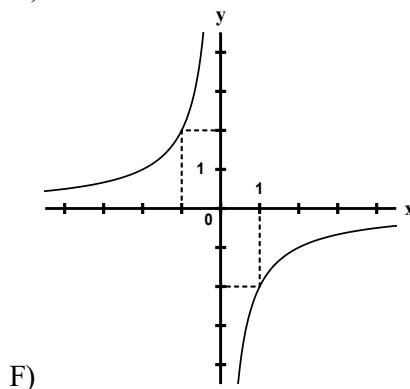
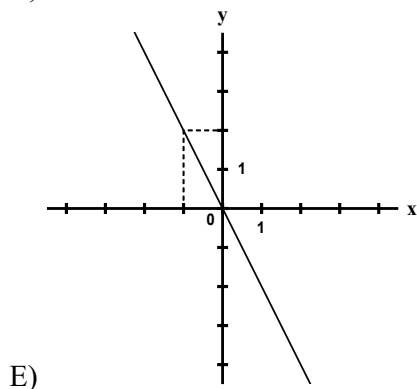
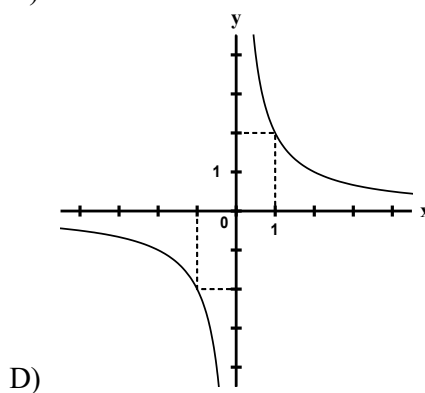
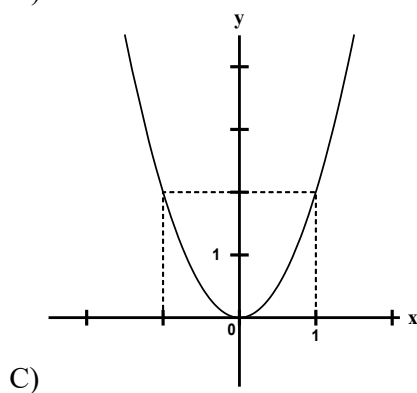
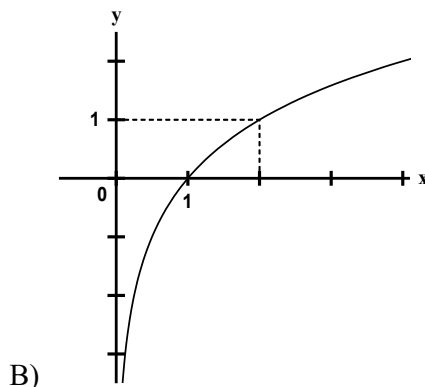
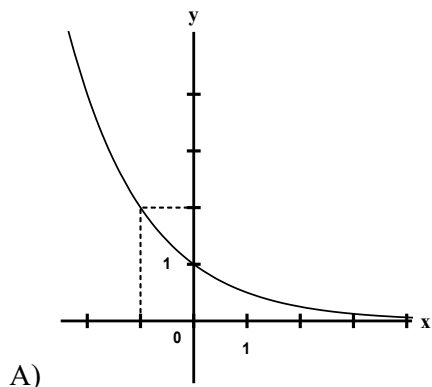
11 V oboru $\mathbf{R}$ řešte: $\log_4(x-8) = 1$

Výsledek: $K = \{12\}$, 1 bod

25 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1-25.4) odpovídající graf funkce (A-F).

Předpisy funkcí si můžete nejprve upravit.

25.1 $y = (2^{-1})^x$ 25.2 $y = 2(-x)^2$ 25.3 $y = 2(-x)^{-1}$ 25.4 $y = 2(-x)$



Výsledek: A; C; F; E, max. 4 body

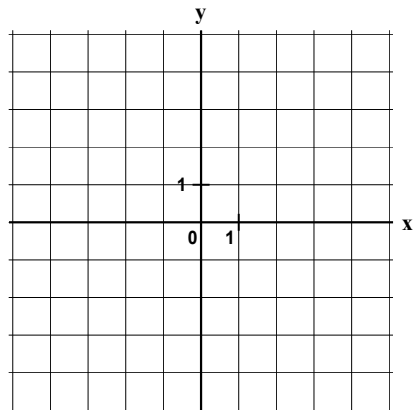
Jaro 2014

6 V oboru $\mathbf{R}$ řešte: $\sqrt{2^{2x}} = 8$

Výsledek: $x = 3$, 1 bod

7 Je dána funkce $g: y = \sin x; x \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Určete ve stupních hodnotu proměnné x , v níž funkce g nabývá minima.

Výsledek: 270° , 1 bod

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Pro $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce $f: y = (2-x)(2+x)$

8.1 Sestrojte graf funkce f . V záznamovém archu obtáhněte graf propisovací tužkou.

8.2 Zapište souřadnice průsečíku $P[x, y]$ grafu funkce f se souřadnicovou osou y .

8.3 Zapište všechny hodnoty proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro něž je hodnota funkce f kladná ($y > 0$)

Výsledek: 8.2 $P[0, 4]$, 8.3 $x \in (-2; 2)$, max. 3 body

24 Graf reálné funkce s předpisem $y = \log_a x$ prochází bodem $P\left[2; \frac{1}{2}\right]$. Ve kterém z uvedených intervalů naleznete hodnotu základu a ?

A) $(5; \infty)$ B) $(3; 5)$ C) $(1; 3)$ D) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ E) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

Výsledek: B, 2 body

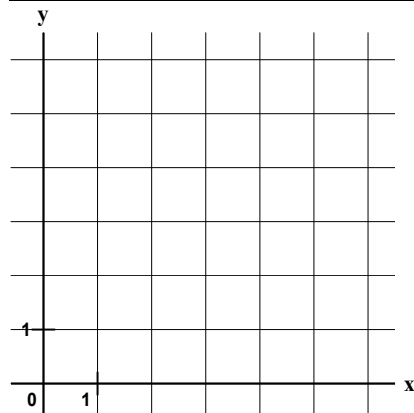
Ilustrační 2014

VÝCHOZÍ TEXT, TABULKA A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Daný obdélník má délky sousedních stran 2,5 cm a 4 cm. Stejný obsah jako daný obdélník mohou mít ještě další pravoúhelníky (čtverec nebo obdélníky). Závislosti délek jejich sousedních stran lze zaznamenat do tabulky, vyjádřit předpisem nebo znázornit grafem.

Pravoúhelníky se stejným obsahem

délka jedné strany pravoúhelníku v cm	2	2,5	5		x
délka druhé strany pravoúhelníku v cm		4			



8.1 Zapište předpis funkce vyjadřující závislost délky y druhé strany pravoúhelníku na délce x první strany pravoúhelníku, jsou-li oba rozměry v centimetrech.

8.2 Sestrojte graf popsané funkce

8.3 Zjistěte, ve kterých bodech protíná graf funkce souřadnicovou osu x .

V **záznamovém archu** obtáhněte graf funkce **propisovací tužkou**.

Výsledek: 8.1 $y = \frac{10}{x}$ 8.2 hyperbola v prvním kvadrantu 8.3 průsečík s osou x neexistuje, max. 3 body

10 Užitím logaritmů vyjádřete ze vztahu $5^y = 4$ proměnnou y .

Výsledek: $y = \log_5 4 = \frac{\log 4}{\log 5}$, 1 bod

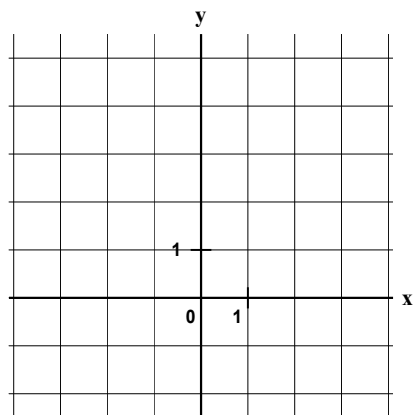
11 Graf reálné funkce s předpisem $y = a^x$ prochází body $A[3;8]$ a $B[b_1;16]$.

Doplňte chybějící souřadnici b_1 bodu B .

Výsledek: $b_1 = 4$, 1 bod

Podzim 2013**VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 8**

Funkce f s reálnou proměnnou x má předpis: $y = (x-1)(x-3)$



8.1 Zapište souřadnice průsečíku $Y[x; y]$ grafu funkce f se souřadnicovou osou y .

8.2 Sestrojte graf funkce y .

V záznamovém archu obtáhněte graf funkce **propisovací tužkou**.

Výsledek: 8.1 $Y[0; 3]$ 8.2 parabola s vrcholem v bodě $[2; -1]$, max. 3 body

VÝCHOZÍ TABULKA K ÚLOZE 9

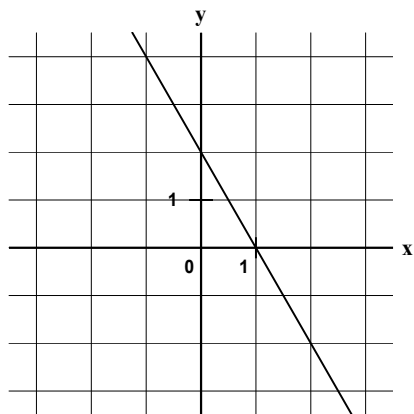
x	9	3^6	3	
$y = \log_3 x$	2			0

V tabulce doplňte chybějící hodnoty.

Výsledek: 6; 1; 1, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 16

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf lineární funkce f , jejíž definiční obor je $\mathbf{R}$.



Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

16.1 Funkce f je konstantní

16.2 Jeden z průsečíků grafu funkce f se souřadnicovými osami je $P[1; 0]$

16.3 $f(0) = 2$

16.4 Předpis funkce f je $y = 2 - 2x$

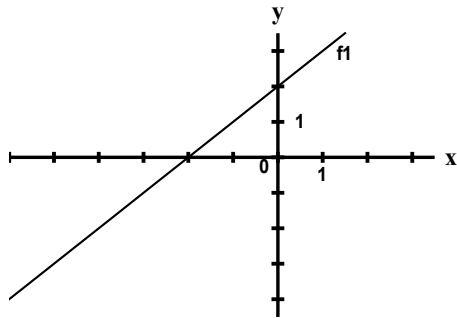
Výsledek: NE, ANO, ANO, ANO, max. 2 body

12 V oboru $\mathbf{R}$ řešte: $5^{x+4} = \frac{25}{5^x}$

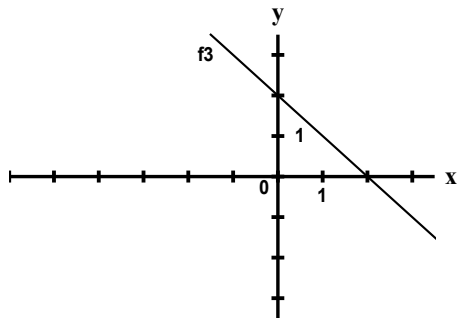
Výsledek: $K = \{-1\}$, max. 2 body

25 Přiřaďte ke každému grafu (25.1–25.4) odpovídající předpis funkce (A–F).

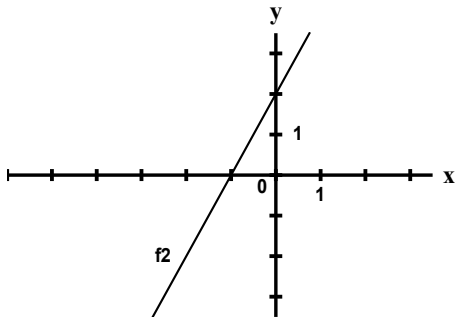
25.1



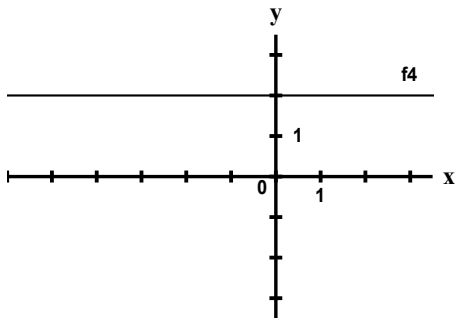
25.3



25.2



25.4



A) $y = 2$ B) $y = x + 2$ C) $y = x - 2$ D) $y = -x + 2$ E) $y = 2x - 1$ F) $y = 2x + 2$

Výsledek: B, F, D, A, max. 4 body

Ilustrační 2013

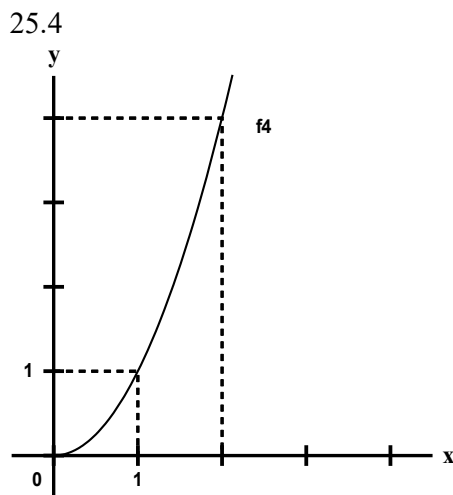
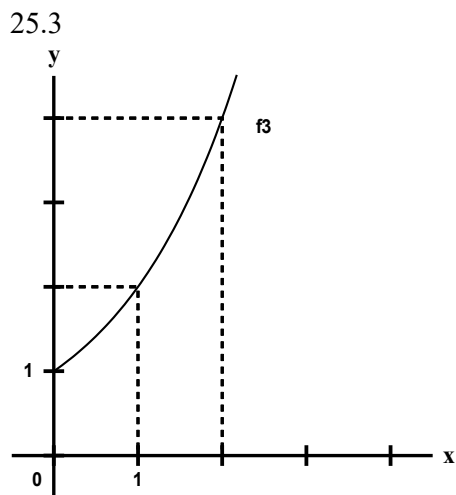
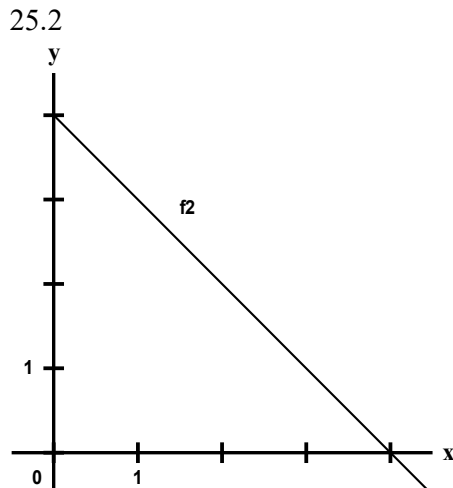
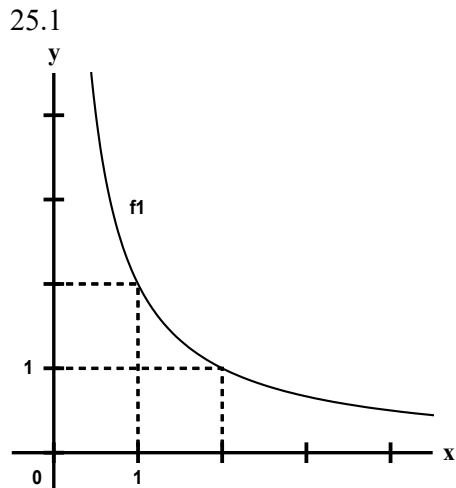
10 V oboru $\mathbf{R}$ řešte rovnici: $\log 5 = \log 4 - \log(5x)$

Výsledek: $x = \frac{4}{25}$, 1 bod

11 Dopočtěte chybějící souřadnici bodu $M[x; 16]$ grafu funkce f dané předpisem: $f: y = 2^x$

Výsledek: $x = 4$, 1 bod

25 Přiřaďte ke každému grafu funkce f_1 – f_4 (25.1–25.4) pro $x \in (0; \infty)$ odpovídající předpis funkce (A–F).



A) $y = 2^x$ B) $y = -4x$ C) $y = \log x$ D) $y = \frac{2}{x}$ E) $y = x^2$ F) $y = 4 - x$

Výsledek: D, F, A, E, max. 4 body
