

Podzim 2025

2 Pro $n \in \mathbb{N}$ vyjádřete šestnáctinásobek výrazu $\left(\frac{1}{4}\right)^{-256n}$

Výsledek zapište ve tvaru mocniny o základu 4.

Řešení

$$16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-256n} = 4^2 \cdot 4^{+256n} = 4^{2+256n}$$

Výsledek: 4^{256n+2} , 1 bod

4 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq y, x \neq -y$ zjednodušte:

$$\left(\frac{x+y}{2x-2y} - \frac{x-y}{2x+2y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2x-2y} - \frac{x-y}{2x+2y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)}\right) \cdot \frac{x-y}{xy} = \\ &= \frac{(x+y)(x+y) - (x-y)(x-y)}{2(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{2(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{xy} = \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{2(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{xy} = \frac{4xy}{2(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{xy} = \frac{2}{x+y} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{2}{x+y}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Do nádrže osobního auta se vejde nejvýše 48 litrů benzínu. Auto vyjelo s plnou nádrží a po celou dobu jízdy udržovalo průměrnou spotřebu 6 litrů benzínu na 100 km jízdy.

5 Vzdálenost v kilometrech, kterou auto ujelo, označíme d .

5.1 Výrazem s proměnnou d vyjádřete v litrech objem benzínu, který zbývá v nádrži po ujetí vzdálenosti d .

5.2 V nádrži auta zbylo 27 litrů benzínu. Vypočítejte, kolik kilometrů auto ujelo.

Řešení

5.1

$$\text{spotřeba na 1 km} \quad \frac{6}{100} = 0,06$$

$$\text{spotřeba na } d \text{ km} \quad 0,06 \cdot d$$

$$\text{zbytek v nádrži} \quad 48 - 0,06d$$

$$\text{V nádrži zbývá } 48 - 0,06d$$

5.2

$$48 - 0,06d = 27$$

$$-0,06d = 27 - 48$$

$$d = \frac{27 - 48}{-0,06}$$

$$d = 350$$

Auto ujelo 350 kilometrů.

Výsledek: 5.1 $48 - 0,06 \cdot d$, 5.2 350 kilometrů, max. 2 body

Jaro 2025

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0,5\}$ zjednodušte:

$$(1-2a)^2 : \left(\frac{1+4a^2}{1+2a} - 2a \right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned}(1-2a)^2 : \left(\frac{1+4a^2}{1+2a} - 2a \right) &= (1-2a) \cdot (1-2a) : \frac{1+4a^2 - 2a \cdot (1+2a)}{1+2a} = \\&= (1-2a) \cdot (1-2a) \cdot \frac{1+2a}{1+4a^2 - 2a - 4a^2} = (1-2a) \cdot (1-2a) \cdot \frac{1+2a}{1-2a} = \\&= \frac{(1-2a) \cdot (1-2a)}{1} \cdot \frac{1+2a}{1-2a} = (1-2a) \cdot (1+2a) = 1-4a^2\end{aligned}$$

Výsledek: $1-4a^2$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOHÁM 5 – 6

V našem autě lze používat dva druhy paliva – běžné nebo power.

Průměrná spotřeba paliva na 100 km jízdy našeho auta je při používání běžného paliva 6,5 litru, ale při používání power paliva se sníží na 5,8 litru.

Jeden litr běžného paliva jsme nakupovali vždy za 34,80 korun, zatímco cena 1 litru power paliva byla o x korun vyšší než cena 1 litru běžného paliva.

5 Naším autem jsme pravidelně jezdili trasu dlouhou d km.

5.1 **Vyjádřete výrazem** s proměnnou d , kolik korun jsme v průměru zaplatili za běžné palivo spotřebované naším autem na této trase.

5.2 **Vyjádřete výrazem** s proměnnými x a d , kolik korun jsme v průměru zaplatili za power palivo spotřebované naším autem na této trase.

6 Za palivo spotřebované naším autem jsme na téže trase zaplatili při použití běžného paliva stejnou částku jako při použití power paliva.

Vypočítejte, o kolik korun byl 1 litr power paliva dražší než 1 litr běžného paliva.

Řešení

5.1

spotřena na 1 km pro běžné palivo $\frac{6,5}{100} = 0,065$

spotřeba na d kilometrů $0,065 \cdot d$

cena tohoto paliva $0,065 \cdot d \cdot 34,8 = 2,262d$

Za běžné palivo jsme zaplatili $2,262d$

5.2

spotřeba na 1 km pro power palivo $\frac{5,8}{100} = 0,058$

spotřeba na d kilometrů $0,058 \cdot d$

cena power paliva $0,058 \cdot d \cdot (34,8 + x)$

Za power palivo jsme zaplatili $0,058d \cdot (34,8 + x)$

6

$$2,262d = 0,058d \cdot (x + 34,8) \quad / :d$$

$$2,262 = 0,058x + 0,058 \cdot 34,8$$

$$2,262 - 0,058 \cdot 34,8 = 0,058x$$

$$x = \frac{2,262 - 0,058 \cdot 34,8}{0,058}$$

$$x = 4,2$$

1 litr power paliva byl dražší o 4,2 Kč.

Výsledek: 5.1 $2,262 \cdot d$ **1 bod, 5.2** $0,058 \cdot d \cdot (x + 34,8)$ **1 bod, 6 o 4,20 korun 1 bod**

Podzim 2024

6 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ **zjednodušte výraz:**

$$\left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{9-3x}{2x^2-2} - \frac{x}{2x+2} \right) : \frac{3}{4x^2-4} =$$

Do záznamového archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{9-3x}{2x^2-2} - \frac{x}{2x+2} \right) : \frac{3}{4x^2-4} &= \left(\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{9-3x}{2(x+1)(x-1)} - \frac{x}{2(x+1)} \right) \cdot \frac{4(x^2-1)}{3} = \\ &= \frac{(x+1)^2 + 9 - 3x - x(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \cdot \frac{4(x+1)(x-1)}{3} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 9 - 3x - x^2 + x}{1} \cdot \frac{2}{3} = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \\ &= \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{20}{3}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Je dán algebraický výraz:

$$\frac{x^2 - 16}{2x^2 - 7x - 4}$$

24 Ke každé podúloze (24.1–24.2) přiřaďte odpovídající výsledek (A–F).

24.1 Jaké jsou všechny hodnoty x , pro něž zadaný výraz nemá smysl?

24.2 Jaké jsou všechny nulové body tohoto výrazu?

A) $-4; 4$ B) 4 C) -4 D) $-\frac{1}{2}; 4$ E) $-\frac{1}{2}$ F) jiný výsledek

Řešení

24.1

Zadaný výraz nemá smysl, jestliže jmenovatel je roven nule

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 4; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Správně je D.

24.2

Zlomek je roven nule, jestliže čitatel je roven nule.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x+4) \cdot (x-4) = 0$$

$$x_1 = 4; x_2 = -4$$

Pro $x = 4$ výraz nemá smysl, zbývá proto pouze $x = -4$, správně je C.

Výsledek: 24.1 D, 24.2 C, max. 4 body

Jaro 2024

6 Pro $x \in R \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:

$$\left(\frac{6}{x^2 - 3x} - \frac{12}{x^2 - 9} \right) : \frac{3}{x^2 + 3x} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{x^2 - 3x} - \frac{12}{x^2 - 9} \right) : \frac{3}{x^2 + 3x} &= \left(\frac{6}{x(x-3)} - \frac{12}{(x+3)(x-3)} \right) \cdot \frac{x(x+3)}{3} = \\ &= \frac{6 \cdot (x+3) - 12x}{x(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x(x+3)}{3} = \frac{6x + 18 - 12x}{x-3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18 - 6x}{x-3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6 \cdot (3-x)}{x-3} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{-6 \cdot (x-3)}{x-3} \cdot \frac{1}{3} = -2 \end{aligned}$$

Výsledek: -2 , max. 2 body

20 Pro $x \in R$ je druhá mocnina dvojčlenu $x \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20}$ rovna výrazu:

A) $5x^2 - 20$ B) $5x^2 + 20$ C) $5x^2 - 20x + 20$ D) $5x^2 - 200x + 20$ E) jiný výsledek

Řešení

$$(x \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20})^2 = (x \cdot \sqrt{5})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} + (\sqrt{20})^2 = 5x^2 - 20x + 20$$

Výsledek: C, 2 body

24 Je dán algebraický výraz:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

Nalezněte všechna x , pro která je hodnota výrazu rovna nule.

A) $-2; 3$ B) $-3; 3$ C) 3 D) -2 E) taková x neexistují

Řešení

Zlomek je roven nule, jestliže čitatel je roven nule.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 3; x_2 = -2$$

Musíme ale ještě uvážit, kdy má výraz vůbec smysl. Dosazením do jmenovatele zjistíme, že pro $x = 3$ je jmenovatel roven nule, to znamená, že pro $x = 3$ výraz nemá smysl, takže zbývá pouze $x = -2$, správně je tedy D.

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2023

3 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zjednodušte:

$$\left(\frac{x^2 + 10}{x} - 1 \right) : \frac{5}{x} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + 10}{x} - 1 \right) : \frac{5}{x} &= \left(\frac{x^2 + 10}{x} : \frac{x}{1} - 1 \right) \cdot \frac{x}{5} = \left(\frac{x^2 + 10}{x} \cdot \frac{1}{x} - 1 \right) \cdot \frac{x}{5} = \left(\frac{x^2 + 10}{x^2} - 1 \right) \cdot \frac{x}{5} = \\ &= \frac{x^2 + 10 - x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{5} = \frac{10}{x} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{2}{x}$, max. 2 body

5

5.1 Pro $n \in \mathbb{N}$ upravte na mocninu o základu 64:

$$8 \cdot 64^n =$$

5.2 Pro $n \in \mathbb{N}$ vyjádřete výrazem ve tvaru jediné mocniny:

$$20\% \text{ z } 25^n$$

Řešení

5.1

$$8 \cdot 64^n = \sqrt{64} \cdot 64^n = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^n = 64^{\frac{1}{2} + n}$$

5.2

$$\frac{20}{100} \cdot 25^n = \frac{1}{5} \cdot 25^n = 5^{-1} \cdot (5^2)^n = 5^{-1} \cdot 5^{2n} = 5^{-1+2n}$$

Výsledek: 5.1 $64^{n + \frac{1}{2}}$, 5.2 5^{2n-1} max. 2 body

Jaro 2023**3 Pro** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$ **zjednodušte:**

$$\frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**Řešení**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} &= \frac{1}{x+2} - \left(\frac{x^2}{x^2-4} : \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{x+2} - \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{2}{x} = \\ &= \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2-2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{-1 \cdot (x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{1}{2-x}$, **max. 2 body****VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22**

Jsou uvedeny úpravy tří výrazů:

I. $\frac{a^{6n}}{a^{2n}} = \dots = a^4$

II. $a^n \cdot \frac{a}{a^{-2}} = \dots = a^{n+3}$

III. $(a^{8n})^2 = \dots = a^{64n^2}$

22 Který výraz byl upraven správně pro každé $a \in (0; +\infty)$ a každé $n \in \mathbb{N}$?

A) Správně byly upraveny alespoň dva ze tří výrazů.

B) pouze I.

C) pouze II.

D) pouze III.

E) Správně nebyl upraven žádný ze tří výraz

Řešení

$$\frac{a^{6n}}{a^{2n}} = \dots = a^4, \text{ špatně, správně je } \frac{a^{6n}}{a^{2n}} = a^{6n-2n} = a^{4n}$$

$$a^n \cdot \frac{a}{a^{-2}} = \dots = a^{n+3}, \text{ tento výraz je správně: } a^n \cdot \frac{a}{a^{-2}} = a^n \cdot a^{1-(-2)} = a^n \cdot a^3 = a^{n+3}$$

$$(a^{8n})^2 = \dots = a^{64n^2}, \text{ špatně, správně je } (a^{8n})^2 = a^{8n \cdot 2} = a^{16n}$$

Výsledek: C, 2 body

Podzim 2022

2 Určete množinu všech $x \in R$, pro která má smysl výraz:

$$\frac{\sqrt{10-2x}}{\sqrt{x-10}}$$

Řešení

Výraz pod odmocninou musí být ≥ 0 , ve jmenovateli navíc pouze > 0 .

$$10 - 2x \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad x - 10 > 0$$

$$-2x \geq -10 \quad x > 10$$

$$x \leq 5$$

Tato soustava nerovnic nemá řešení, proto $x \in \emptyset$

Výsledek: $x \in \emptyset$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

V bedýnce jsou jogurty a rohlíky pro děti z letního tábora.

V bedýnce je x jogurtů a r -krát více rohlíků než jogurtů.

Jeden jogurt stál 10 korun a jeden rohlík 2 koruny.

Za všechny jogurty a rohlíky, které jsou v bedýnce, se zaplatilo dohromady p korun.

(x, r, p jsou z množiny kladných celých čísel.)

4 Vyjádřete počet jogurtů x v bedýnce v závislosti na veličinách r a p .

Řešení

počet jogurtů x

počet rohlíků $r \cdot x$

jogurty stály $10 \cdot x$

rohlíky stály $2 \cdot r \cdot x$

dohromady $10x + 2rx = p$

Z této rovnice vyjádříme neznámou veličinu x :

$$10x + 2rx = p$$

$$x \cdot (10 + 2r) = p$$

$$x = \frac{p}{10 + 2r}$$

Výsledek: $x = \frac{p}{2r + 10}$, max. 2 body

5 Pro $x \in R \setminus \{-2; 0\}$ zjednodušte:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{8}{x+2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{8}{x+2} &= \frac{(x-2)(x+4)}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x+2} \cdot \frac{x^2}{1} = \frac{(x-2)(x+4)}{x^2 \cdot (x+2)} + \frac{8}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{(x-2)(x+4)}{x^2 \cdot (x+2)} + \frac{8}{x^2 \cdot (x+2)} = \frac{x^2 + 4x - 2x - 8 + 8}{x^2(x+2)} = \frac{x^2 + 2x}{x^2(x+2)} = \frac{x(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{1}{x}$, max. 2 body

Jaro 2022

2 Pro $n \in \mathbb{N}$ upravte na mocninu o základu 4.

$$4 \cdot \frac{16^{3n}}{4^{2n+1}}$$

Řešení

$$4 \cdot \frac{16^{3n}}{4^{2n+1}} = 4 \cdot \frac{(4^2)^{3n}}{4^{2n+1}} = 4 \cdot \frac{4^{6n}}{4^{2n+1}} = 4 \cdot 4^{6n-(2n+1)} = 4^1 \cdot 4^{4n-1} = 4^{1+4n-1} = 4^{4n}$$

Výsledek: 4^{4n} , 1 bod

6 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \frac{1}{x^2 - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \frac{1}{x^2 - 9} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-3)} \right) \cdot \frac{x^2 - 9}{1} = \frac{x-3+3}{x(x-3)} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{1} = \\ &= \frac{x}{x} \cdot \frac{x+3}{1} = x+3 \end{aligned}$$

Výsledek: $x+3$, max. 2 body

Podzim 2021

4 Je dán výraz

$$\frac{\sqrt{c}-3}{9} - \frac{2}{3}$$

Určete $c \in R$, pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

Řešení

$$\frac{\sqrt{c}-3}{9} - \frac{2}{3} = 0 \quad / \cdot 9$$

$$\sqrt{c} - 3 - 6 = 0$$

$$\sqrt{c} = 9$$

$$c = 81$$

Výsledek: $c = 81$, 1 bod

5 Pro $x \in R \setminus \{-2; 2\}$ zjednodušte:

$$\left(\frac{2}{x+2} + \frac{x}{2-x} \right) : \frac{x^2+4}{x+2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{x+2} + \frac{x}{2-x} \right) : \frac{x^2+4}{x+2} &= \frac{2(2-x) + x(x+2)}{(x+2)(2-x)} \cdot \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{4-2x+x^2+2x}{(x+2)(2-x)} \cdot \frac{x+2}{x^2+4} = \\ &= \frac{4+x^2}{(x+2)(2-x)} \cdot \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{1}{2-x}$, max. 2 body

Červenec 2021 – mimořádný termín

1 Pro $n \in \mathbb{N}$ odstraňte závorky a sečtěte.

Výsledný výraz vyjádřete jediným členem, a to bez závorek.

$$(-n^4)^{-1} - n^{-4} + (-n)^{-4} =$$

Řešení

$$(-n^4)^{-1} - n^{-4} + (-n)^{-4} = -n^{-4} - n^{-4} + n^{-4} = -n^{-4}$$

Výsledek: $-n^{-4}$, 1 bod

4 Jedna strana obdélníku je o pětinu kratší než strana čtverce a obsahy obou těchto útvarů jsou stejné. Délku strany čtverce označíme a .

Vyjádřete délku delší strany obdélníku v závislosti na veličině a .

Řešení

délka strany čtverce

$$a$$

délka kratší strany obdélníku

$$\frac{4}{5}a$$

délka delší strany obdélníku

$$x$$

Obsahy jsou stejné:

$$a^2 = \frac{4}{5}a \cdot x / \cdot 5$$

$$5a^2 = 4ax$$

$$x = \frac{5a^2}{4a}$$

$$x = \frac{5}{4}a$$

Výsledek: $\frac{5}{4}a$, 1 bod

5 Pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zjednodušte:

$$\frac{y-1}{1-\frac{y-1}{y}} \cdot \frac{1}{2y} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{1-\frac{y-1}{y}} \cdot \frac{1}{2y} &= \frac{y-1}{1} : \left(1 - \frac{y-1}{y}\right) \cdot \frac{1}{2y} = \frac{y-1}{1} : \frac{y-y+1}{y} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{y-1}{1} \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{1}{2y} = \\ &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{y-1}{2}$, max. 2 body

18 Je dán výraz V s reálnou proměnnou x :

$$V(x) = \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2}$$

Které tvrzení je pravdivé?

- A) Hodnota výrazu V je nulová pro $x = 0$.
- B) Hodnota výrazu V je rovna 2 pro $x = -2$.
- C) Hodnota výrazu V je pro $x = -3$ menší než pro $x = 3$.
- D) Hodnota výrazu V nemůže být rovna 1.
- E) Hodnota výrazu V nemůže být nikdy záporná.

Řešení

$$V(x) = \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2}$$

Odpověď A není správná, protože pro $x = 0$ nemá výraz smysl, tudíž jeho hodnota nemůže být nulová.

Pro hodnoty $x \neq 0$ můžeme výraz upravit:

$$V(x) = \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+1}$$

Nyní už je jasné, že hodnota výrazu $\frac{x}{x+1}$ nemůže být rovna 1, správné je D.

Výsledek: D, 2 body

Jaro 2021

1 Pro $a \in \mathbb{N}$ upravte výraz a vyjádřete jej ve tvaru odmocniny o základu a .

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} =$$

Řešení

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

Výsledek: $\sqrt[12]{a}$, 1 bod

4 Pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ zjednodušte:

$$\frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} &= \left[\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \right] : \frac{3y - 9}{1} = \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} \right) \cdot \frac{1}{3y - 9} = \frac{3y - y^2}{9} \cdot \frac{1}{3y - 9} = \frac{y(3 - y)}{9} \cdot \frac{1}{3(y - 3)} = \\ &= \frac{-y(y - 3)}{9} \cdot \frac{1}{3(y - 3)} = -\frac{y}{27} \end{aligned}$$

Výsledek: $-\frac{y}{27}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Na stejné cívky se navíjejí ocelová lana. Hmotnost **prázdné cívky** je c tun, hmotnost samotného **lana** na plně navinuté cívce je ℓ tun a hmotnost lana poloviční délky je $0,5\ell$ tun.

Jedna plně navinutá cívka a 11 prázdných cívek mají dohromady o 4 tony menší hmotnost než 6 cívek s lany polovičních délek.

5 Vyjádřete veličinu ℓ v závislosti na veličině c .

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\text{Jedna plně navinutá cívka a 11 prázdných cívek} \quad c + \ell + 11c = 12c + \ell$$

$$\text{6 cívek s lany polovičních délek} \quad 6c + 6 \cdot 0,5\ell = 6c + 3\ell$$

$$12c + \ell + 4 = 6c + 3\ell$$

$$12c - 6c + 4 = 3\ell - \ell$$

$$6c + 4 = 2\ell$$

$$\ell = \frac{6c + 4}{2}$$

$$\ell = \frac{2(3c + 2)}{2}$$

$$\ell = 3c + 2$$

Výsledek: $\ell = 3c + 2$, max. 2 body

18 Je dán výraz:

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}$$

Hodnota výrazu $V(a)$ je rovna nule pro

- A) alespoň tři celá čísla.
- B) právě dvě záporná celá čísla.
- C) právě jedno kladné a jedno záporné celé číslo.
- D) právě dvě kladná celá čísla.
- E) právě jedno celé číslo.

Řešení

Výraz nejprve rozložíme na součin

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2} = \frac{(a+4)(a+2)(a-2)(a+3)(a+3)}{(a+3)(a-3)(a-2)(a-2)}$$

Výraz je roven nule, pokud je roven nule čítec, ten je nulový pro čísla $-4; -2; 2; -3$.

Musíme ale také zvážít, kdy výraz nemá smysl a to je pro čísla, pro něž je jmenovatel nulový, tato čísla jsou $-3; 3; 2$. Zbývají tedy čísla $-4; -2$, správně je B.

Výsledek: B, 2 body

Podzim 2020

2 Pro $y \in (0; \infty)$ zjednodušte:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Řešení

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \frac{16}{y^{28}}} = \sqrt{y^{64-28}} = \sqrt{y^{36}} = y^{\frac{36}{2}} = y^{18}$$

Výsledek: y^{18} , 1 bod

3 Určete všechny hodnoty $c \in \mathbb{R}$, pro které má smysl výraz:

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{5-c}}$$

Řešení

Musí platit tyto podmínky:

$1 - c \geq 0$ - výraz „pod“ odmocninou musí být větší nebo roven nule

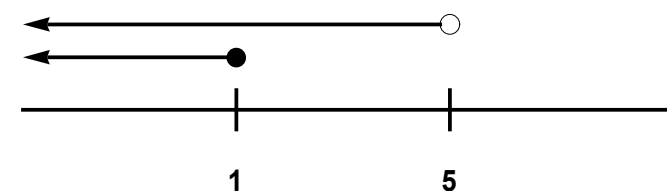
$5 - c > 0$ - výraz „pod“ odmocninou musí být ≥ 0 , ale navíc je ve jmenovateli, tak se rovnat nule nemůže

Řešíme tedy soustavu nerovnic:

$$1 - c \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad 5 - c > 0$$

$$-c \geq -1 \quad / \cdot (-1) \quad \text{a zároveň} \quad -c > -5 \quad / \cdot (-1)$$

$$c \leq 1 \quad \text{a zároveň} \quad c < 5$$



$$c \in (-\infty; 1]$$

Výsledek: $c \in (-\infty; 1]$, 1 bod

5 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ zjednodušte

(výsledný výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\frac{\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1}}{\frac{a}{a+1}} - 1 =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1}}{\frac{a}{a+1}} - 1 &= \frac{a+1}{\frac{a+1-a}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = \frac{a+1}{\frac{1}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = \frac{a+1}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = (a+1) \cdot (a+1) - 1 = \\ &= a^2 + a + a + 1 - 1 = a^2 + 2a \end{aligned}$$

Výsledek: $a^2 + 2a$, max. 2 body

Jaro 2020

2 Pro $n \in \mathbb{N}$ upravte do tvaru trojčlenu:

$$(n \cdot \sqrt{2} + 2)^2 - n \cdot \sqrt{18} =$$

Řešení

Na kalkulačce zjistíte, že $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}(n \cdot \sqrt{2} + 2)^2 - n \cdot \sqrt{18} &= (n \cdot \sqrt{2})^2 + 2 \cdot n \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + 4 - n \cdot \sqrt{18} = n^2 \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot n + 4 - n \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = \\ &= 2n^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot n - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot n + 4 = 2n^2 + \sqrt{2} \cdot n + 4\end{aligned}$$

Výsledek: $2n^2 + \sqrt{2} \cdot n + 4$, 1 bod

3 Pro všechny kladné hodnoty veličin a, b, c platí:

$$a : c = 3 : 10$$

$$b = 3a + c$$

Vyjádřete co nejjednodušším způsobem veličinu b pouze v závislosti na veličině c .

Řešení

Dělení zapsané pomocí : je vždy lepší zapsat pomocí zlomku. Z první rovnice vypočítáme a a dosadíme ho do druhé rovnice.

$$\frac{a}{c} = \frac{3}{10} \quad / \cdot c$$

$$a = \frac{3c}{10}$$

$$b = 3 \cdot \frac{3c}{10} + c = \frac{9c}{10} + \frac{10c}{10} = \frac{19c}{10}$$

Výsledek: $b = \frac{19}{10}c$, 1 bod

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 5; 1, 5\}$ zjednodušte:

$$\left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2-3a}{4a^2-9} \right) : \frac{1}{2a+3} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned}\left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2-3a}{4a^2-9} \right) : \frac{1}{2a+3} &= \left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2-3a}{(2a+3)(2a-3)} \right) \cdot \frac{2a+3}{1} = \frac{3a \cdot (2a-3) - 1 \cdot (2a^2-3a)}{(2a+3)(2a-3)} \cdot \frac{2a+3}{1} = \\ &= \frac{6a^2-9a-2a^2+3a}{2a-3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4a^2-6a}{2a-3} = \frac{2a(2a-3)}{2a-3} = 2a\end{aligned}$$

Výsledek: $2a$, max. 2 body

$$\frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Uvedená rovnost výrazů platí

- A) pro všechna reálná čísla x a y .
- B) pro libovolné reálné číslo y a každé nenulové reálné číslo x .
- C) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné reálné číslo.
- D) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné nenulové reálné číslo.
- E) pro všechna reálná čísla x a y , kde $x \neq 0$ a současně $x \neq y$.

Řešení

Rovnost nejprve upravíme:

$$\frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{y}{x \cdot (x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2} / \cdot (x^2 + 2)$$

$$\frac{y \cdot (x^2 + 2)}{x \cdot (x^2 + 2)} = 1$$

$$\frac{y}{x} = 1 / \cdot x$$

$$y = x$$

Musíme si navíc uvědomit podmínku výrazu $x \neq 0$. Proto správná odpověď je D.

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2019

2 Vypočtete, kterým číslem musíme vydělit 5^{250} , abychom dostali 25^5 .

Výsledek vyjádřete rovněž ve tvaru mocniny.

Řešení

$$\frac{5^{250}}{x} = 25^5 / \cdot x$$

$$5^{250} = (5^2)^5 \cdot x$$

$$5^{250} = 5^{10} \cdot x / : 5^{10}$$

$$\frac{5^{250}}{5^{10}} = x$$

$$x = 5^{240}$$

Výsledek: 5^{240} , 1 bod

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ upravte na co nejjednodušší tvar (výsledný výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\frac{\frac{a+6}{a-2} + 1}{2} \cdot (a^2 - 4a + 4) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+6}{a-2} + 1}{2} \cdot (a^2 - 4a + 4) &= \frac{\frac{a+6+1 \cdot (a-2)}{a-2}}{2} \cdot (a-2)^2 = \frac{\frac{a+6+a-2}{a-2}}{\frac{2}{1}} \cdot (a-2)^2 = \frac{2a+4}{a-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a-2)^2 = \\ &= \frac{2(a+2)}{a-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-2) \cdot (a-2)}{1} = (a+2) \cdot (a-2) = a^2 - 4 \end{aligned}$$

Výsledek: $a^2 - 4$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Dva mniši opisovali rukopisy. Každý z nich pracoval stále stejným tempem. Mladší Dominik opsál za každý týden n stránek rukopisu ($n \in \mathbb{N}$). Starší Alfons byl pomalejší a každý týden opsál o třetinu méně stránek než Dominik.

6

6.1 Určete v závislosti na n , kolik stránek celkem opsali oba mniši za 3 týdny.

6.2 Určete, za **kolik týdnů** opsali oba mniši celkem $100n$ stránek rukopisu.

Řešení

Dominik n za týden

Alfons $\frac{2}{3} \cdot n$ za týden

$$6.1 \text{ za 3 týdny opsali dohromady } 3 \cdot \left(n + \frac{2n}{3} \right) = 3n + 2n = 5n$$

$$6.2 \text{ za týden opsali dohromady } n + \frac{2n}{3} = \frac{5n}{3}$$

Za x týdnů opsali $100n$ stránek:

$$x \cdot \frac{5n}{3} = 100n \quad / : 3$$

$$x \cdot 5n = 3 \cdot 100n$$

$$x = 60$$

Výsledek: 6.1 $5n$ stránek, 1 bod, 6.2 za 60 týdnů, 1 bod

18 Pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $x > 0, y = -5$.

Který z následujících výrazů může být za výše uvedených podmínek pro některé hodnoty x kladný?

A) $\frac{1}{x} + y$ B) $y - x^2$ C) $y - x$ D) xy E) $\frac{x^2}{y}$

Řešení

Podobné příklady, kde jsou navrženy odpovědi, je možné řešit i zkusmo. Za y dosadíme -5 a zkusíme za x dosazovat různá čísla a sledujeme, jestli výsledek může být kladný.

A) $\frac{1}{x} + y \rightarrow \frac{1}{x} - 5$ pokud za x dosadíme např. $0,1$ bude výsledek kladný $\frac{1}{0,1} - 5 = 5$

Výsledek: A, 2 body

Jaro 2019

2 Vypočtěte 50% z čísla 2^{1000} . Výsledek vyjádřete rovněž ve tvaru mocniny.

Řešení

50% z čísla je jedna polovina čísla: $\frac{2^{1000}}{2} = \frac{2^{1000}}{2^1} = 2^{1000-1} = 2^{999}$

Výsledek: 2^{999} , 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení. Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

3 Počet míst k sezení v jednom vagonu označme n .

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok

3.1 byli ve vlaku;

3.2 ve vlaku stáli.

Řešení

míst k sezení v jednom vagonu n

míst ke stání v jednom vagonu $n + 20$

3.1

celkem míst ve vlaku: $3 \cdot (n + n + 20) = 6n + 60$

vlak byl zaplněn do poloviny $\frac{6n + 60}{2} = 3n + 30$

3.2

seděli: $n + n + 0,75n = 2,75n$

stáli = celkem – seděli: $3n + 30 - 2,75n = 0,25n + 30$

Výsledek: 3.1 $3n + 30$, **1 bod, 3.2** $0,25n + 30$, **1 bod**

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} = \frac{\frac{a+3}{a}}{\frac{a^2-9}{3}} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{(a+3)(a-3)}{3} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{3}{(a+3)(a-3)} = \frac{3}{a(a-3)} = \frac{3}{a^2-3a}$$

Výsledek: $\frac{3}{a^2-3a}$ a postup řešení, max. 2 body

24 Je dán výraz $\frac{12(a-2)^2}{12-6a}$ s reálnou proměnnou a .

Které tvrzení je pravdivé?

A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný. B) Pro $a = 2$ je hodnota výrazu 0. C) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová. D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$. E) Pro některá a je výraz roven $2(a-2)$.

Řešení

A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný. Není pravda, protože čítec je kladný a jmenovatel je záporný.

B) Pro $a = 2$ je hodnota výrazu 0. Není pravda, protože pro $a = 2$ je jmenovatel roven nule a zlomek nemá smysl.

C) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová. Je pravda, protože zlomek je roven nule, jestliže čítec je roven nule a ten je roven nule pro $a = 2$ a pro tuto hodnotu zlomek nemá smysl.

D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$. Není pravda, protože:

$$\frac{12(a-2)^2}{12-6a} = \frac{12(2-a)^2}{6(2-a)} = 2(2-a), a \neq 2$$

E) Pro některá a je výraz roven $2(a-2)$. Není pravda – viz D)

Výsledek: C, 2 body

Podzim 2018

2 Je dán výraz:

$$\frac{2c+12}{2-c} \cdot (6-c)$$

Určete všechny hodnoty $c \in R$, pro které je hodnota výrazu rovna nule.

Řešení

$$\frac{2c+12}{2-c} \cdot (6-c) = 0$$

$$\frac{(2c+12) \cdot (6-c)}{2-c} = 0 \quad / \cdot (2-c)$$

$$(2c+12) \cdot (6-c) = 0$$

$$2(c+6)(6-c) = 0$$

$$c+6=0 \quad \text{nebo} \quad 6-c=0$$

$$c=-6 \quad \text{nebo} \quad c=6$$

Ještě je potřeba dát pozor na to, že pro $c=2$ výraz nemá smysl.

Výsledek: Výraz je roven nule pro $c=-6$; $c=6$, 1 bod

4 Pro $a \in R$ je dán výraz:

$$\frac{a-a^{-1}}{a^0-a^2}$$

4.1 Výraz zjednodušte

4.2 Určete, pro která reálná čísla a má výraz smysl (tj. podmínky).

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$4.1 \quad \frac{a-a^{-1}}{a^0-a^2} = \frac{a-\frac{1}{a}}{1-a^2} = \left(a-\frac{1}{a}\right) : (1-a^2) = \frac{a^2-1}{a} : \frac{1-a^2}{1} = \frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{1}{-1 \cdot (-1+a^2)} = -\frac{1}{a}$$

4.2

$$a \neq 0 \quad \text{a} \quad 1-a^2 \neq 0$$

$$(1-a)(1+a) \neq 0$$

$$a \neq 1; a \neq -1$$

Výsledek: 4.1 $-\frac{1}{a}$, 4.2 $a \neq -1$; $a \neq 0$; $a \neq 1$, max. 3 body

Jaro 2018

1 Odstraňte závorky a zjednodušte ($n \in N$):

$$2\left(3 - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(3 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) =$$

Řešení

$$\begin{aligned} 2\left(3 - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(3 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{3}{1} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{3}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) = 2 \cdot \frac{6-n-n}{2} \cdot \frac{6+n+n}{2} = \frac{6-2n}{1} \cdot \frac{6+2n}{2} = \\ &= \frac{(6-2n)(6+2n)}{2} = \frac{36-12n+12n-4n^2}{2} = \frac{36-4n^2}{2} = \frac{4(9-n^2)}{2} = 2(9-n^2) = 18-2n^2 \end{aligned}$$

Výsledek: $18-2n^2$, 1 bod

4 Pro $y \in R \setminus \{0;1;2\}$ zjednodušte:

$$\frac{y-1-\frac{1}{y-1}}{2y^2-4y} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{y-1-\frac{1}{y-1}}{2y^2-4y} &= \left(y-1-\frac{1}{y-1}\right) : \frac{2y^2-4y}{1} = \left(\frac{y}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{y-1}\right) \cdot \frac{1}{2y^2-4y} = \frac{y(y-1)-1(y-1)-1}{y-1} \cdot \frac{1}{2y^2-4y} = \\ &= \frac{y^2-y-y+1-1}{y-1} \cdot \frac{1}{2y(y-2)} = \frac{y^2-2y}{y-1} \cdot \frac{1}{2y(y-2)} = \frac{y(y-2)}{y-1} \cdot \frac{1}{2y(y-2)} = \frac{1}{2(y-1)} \end{aligned}$$

Výsledek: $\frac{1}{2(y-1)}$, 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), je-li pravdivé (A) pro všechna $a > b > 0$, či nikoli (N).

$$16.1 \ (ab-2a)^2 = a^2(b-2)^2 \quad 16.2 \ \sqrt{a^2-b^2} = a-b \quad 16.3 \ \frac{a^{50}}{a^{10}} = a^5 \quad 16.4 \ a \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$$

Řešení

Nejjednodušší je dosadit do levé i pravé strany libovolná čísla a porovnat výsledky. Matematicky korektnější je ale upravit levou stranu a porovnat s pravou stranou.

$$16.1 \ (ab-2a)^2 = [a(b-2)]^2 = a^2(b-2)^2 \quad \text{ANO}$$

$$16.2 \ \sqrt{a^2-b^2} \text{ vzorec pro odmocninu rozdílu neexistuje (zde je jednodušší dosadit) NE}$$

$$16.3 \ \frac{a^{50}}{a^{10}} = a^{50-10} = a^{40} \text{ při dělení mocnin se exponenty odečítají NE}$$

$$16.4 \ a \cdot \sqrt{a} = a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}} \quad \text{ANO}$$

Výsledek: ANNA, max. 2 body
