

Složitější příklady

- 1) V nekonečné geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_3 = 5, \frac{a_4}{a_2} = 9$$

Určete, kolikrát větší je součet členů $a_5 + a_6$ než součet členů $a_1 + a_2$.

- 2) V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je znám její pátý člen $a_5 = 4$ a desátý člen $a_{10} = 972$.

Určete $a_8 - a_5$.

- 3) Mozaika je sestavena z několika řad shodných šestiúhelníků.



Obsahuje 10 řad, nejvíce šestiúhelníků je v horní řadě, v každé další řadě je o polovinu méně šestiúhelníků než v řadě nad ní. Ve třetí řadě zdola je 36 šestiúhelníků.

Kolik šestiúhelníků je v horní řadě mozaiky?

- 4) V **geometrické** posloupnosti je třetí člen $a_3 = 2$ a čtvrtý člen je o 3 menší než třetí člen.

Jaký je součet prvních tří členů uvedené geometrické posloupnosti $(a_1 + a_2 + a_3)$?

- 5) Vytváříme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

První člen je v obou posloupnostech stejný: $a_1 = b_1 = 24$.

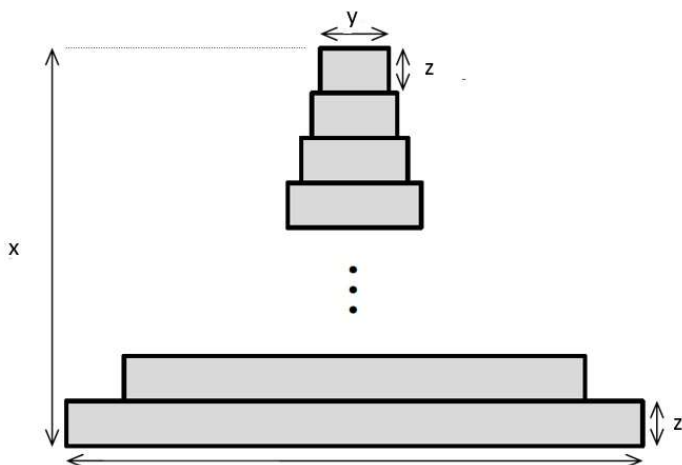
V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **prvního** členu.

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **předchozího** členu.

Kolikrát větší je člen b_{33} než člen a_{33} ? (Výsledek je zaokrouhlen na jednotky.)

- 6) Na zeď haly je promítnut obrazec vysoký $x = 708$ cm. Obrazec je složen z obdélníků, první obdélník shora má výšku $z = 59$ cm a šířku $y = 64$ cm. Každý další obdélník má rovněž výšku $z = 59$ cm, ale šířku má vždy o čtvrtinu větší, než je šířka předchozího obdélníku.

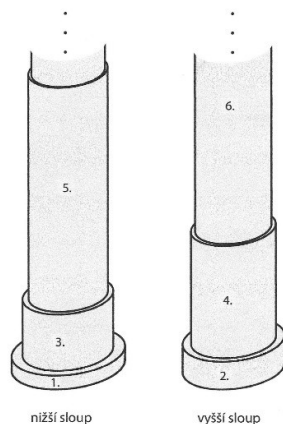
(Mezi obdélníky nejsou žádné mezery.)



Jaká je šířka s posledního obdélníku? Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

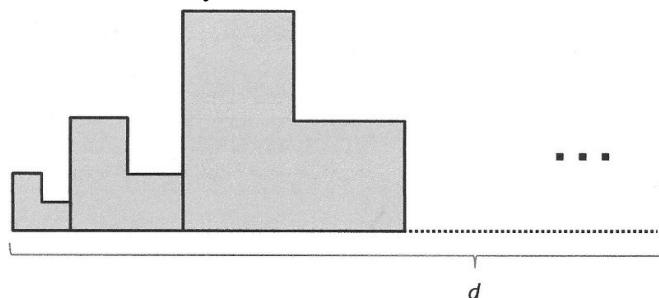
- 7) V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1,4$ platí, že součin prvního a druhého členu je stejný jako součet obou těchto členů. Vypočítejte kvocient této posloupnosti.
- 8) V Kocourkově navrhli nereálný plán stavby dvou sloupů sahajících do nebe. Na stavbu se má použít celkem 20 válců. Jednotlivé válce jsou podle výšky označeny pořadovými čísly od 1 do 20.

Nejnižší je 1. válec s výškou 1 m, 2. válec má výšku 2 m a rovněž každý další válec je dvakrát vyšší než válec s pořadovým číslem o 1 nižším. (Tedy 3. válec má výšku 4 m, 4. válec 8 m atd.) Nižší sloup bude postaven ze všech válců označených lichými pořadovými čísly od 1 do 19, vyšší sloup ze všech válců označených sudými pořadovými čísly od 2 do 20.

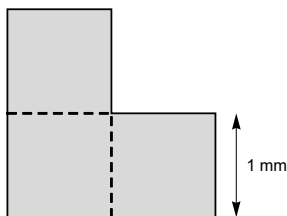


Určete v metrech výšku 20. válce a výšku nižšího sloupu.

- 9) Obrazec je vytvořen z 9 dlaždic ve tvaru písmene „L“. Dlaždice jsou umístěny těsně vedle sebe a postupně se zvětšují. Rozměry každých dvou sousedních dlaždic jsou v poměru 1 : 2. Délku celého obrazce vytvořeného z 9 dlaždic označme d .



Každou dlaždici lze rozdělit na tři shodné čtverce. První dlaždice je nejmenší. Její obsah je 3 mm^2 .



V obrazci vytvořeném z 9 dlaždic určete obsah plochy páté nejmenší dlaždice (v mm^2) a délku d celého obrazce (v mm)

Řešení

1)

$$\frac{a_4}{a_2} = 9$$

$$\frac{a_1 \cdot q^3}{a_1 \cdot q} = 9$$

$$q^2 = 9$$

$$q_1 = 3$$

$$q_2 = -3$$

Řešení pro $q = 3$

$$a_3 = 5$$

$$a_2 = \frac{5}{3}$$

$$a_1 = \frac{5}{9}$$

$$a_4 = 15$$

$$a_5 = 45$$

$$a_6 = 135$$

$$\frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2} = \frac{45 + 135}{\frac{5}{9} + \frac{5}{3}} = 81$$

Řešení pro $q = -3$

$$a_3 = 5$$

$$a_2 = -\frac{5}{3}$$

$$a_1 = \frac{5}{9}$$

$$a_4 = -15$$

$$a_5 = 45$$

$$a_6 = -135$$

$$\frac{a_5 + a_6}{a_1 + a_2} = \frac{45 - 135}{\frac{5}{9} - \frac{5}{3}} = 81$$

Součet členů $a_5 + a_6$ je 81 krát větší než součet členů $a_1 + a_2$.

2)

$$a_5 = 4, a_{10} = 972$$

$$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$$

$$972 = 4 \cdot q^5 \quad / :4$$

$$\frac{972}{4} = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$a_8 = \frac{a_{10}}{q^2} = \frac{972}{9} = 108$$

$$a_5 = 4$$

$$a_8 - a_5 = 108 - 4 = 104$$

$$a_8 - a_5 = 104$$

3)

Jednodušší je brát řady odzdoła:

$$a_3 = 36$$

$$q = 2$$

$$n = 10$$

Použijeme vzorec z tabulek:

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$a_{10} = a_3 \cdot q^{10-3}$$

$$a_{10} = 36 \cdot 2^7 = 4\,608$$

V horní řadě mozaiky je 4 608 šestiúhelníků.

4)

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 2 - 3 = -1$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_3 : q = 2 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$a_1 = a_2 : q = -4 : \left(-\frac{1}{2}\right) = 8$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 8 + (-4) + 2 = 6$$

Součet prvních tří členů uvedené geometrické posloupnosti je 6.

5)

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická

$$a_1 = 24$$

$$d = 12$$

$$a_{33} = 24 + 32 \cdot 12 = 408$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická

$$b_1 = 24$$

$$q = 1,5$$

$$b_{33} = 24 \cdot 1,5^{32} = 10\,354\,557,2$$

$$\frac{b_{33}}{a_{33}} = \frac{24 \cdot 1,5^{32}}{408} = 25\,379$$

Člen b_{33} je 25 379 krát větší než člen a_{33} .

6)

Jedná se o geometrickou posloupnost:

$$a_1 = 64 \text{ cm}$$

$$q = 1,25$$

$$n = \frac{708}{59} = 12$$

$$a_{12} = 64 \cdot 1,25^{11} = 745 \text{ cm}$$

Šířka posledního obdélníku je 745 cm

7)

$$a_1 \cdot a_2 = a_1 + a_2$$

$$a_1 \cdot a_1 \cdot q = a_1 + a_1 \cdot q$$

$$1,4 \cdot 1,4 \cdot q = 1,4 + 1,4 \cdot q$$

$$1,96q - 1,4q = 1,4$$

$$q = 2,5$$

Kvocient geometrické posloupnosti je 2,5.

8)

Všech 20 válců tvoří geometrickou posloupnost:

$$a_1 = 1 \text{ m}$$

$$q = 2$$

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{19} = 1 \cdot 2^{19} = 524288$$

Dvacátý válec je vysoký 524 288 m.

Válce s lichými pořadovými čísly tvoří geometrickou posloupnost:

$$a_1 = 1 \text{ m}$$

$$q = 4$$

Válců je deset, počítáme součet výšek:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = 349525$$

Výška nižšího sloupu je 349 525 m.

9)

Spodní strany dlaždic tvoří geometrickou posloupnost:

$$a_1 = 2$$

$$q = 2$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$$

Pátá dlaždice má spodní stranu 32 mm, tj. skládá se ze tří čtverců o straně 16 mm, její obsah je tedy

$$S = 3 \cdot 16^2 = 768$$

Obsah plochy páté nejmenší dlaždice je 768 mm².

$$s_9 = a_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 1022$$

Délka celého obrazce je 1022 mm.