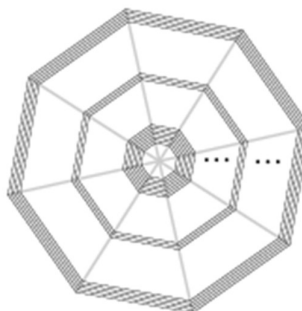


Příklady

- 1) V aritmetické posloupnosti platí: $a_n = \frac{6+8n}{0,2}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jaká je diference posloupnosti?
- 2) Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů, z nichž první tři jsou -140 ; -132 ; -124 a poslední tři 236 ; 244 ; 252 . Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 100 .
- 3) Určete největší záporný člen aritmetické posloupnosti, jejímž prvním členem je číslo 100 a třetím členem je číslo 76 .
- 4) Trubky jsou srovnány v osmi řadách nad sebou tak, že vrchní řada má 13 trubek a každá další řada o 1 trubku více. Kolik je všech trubek?
- 5) Posloupnost tvoří sedmáct po sobě jdoucích přirozených lichých čísel seřazených vzestupně od nejmenšího k největšímu. Prostřední člen je číslo 23 . Určete součet čtyř nejmenších členů.
- 6) Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří AP. Delší odvěsna je 24 cm. Určete obsah trojúhelníka.
- 7) Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Přepona je 30 cm. Určete odvěsny.

- 8) V husté dekorační pavučině jsou na drátěné konstrukci napnutá vlákna. Každé vlákno je napnuto kolem dokola a připevněno ke všem drátům konstrukce. Nejkratší vlákno je nejblíže středu a jeho délka je 24 cm. Každé další vlákno je o 4 mm delší než předchozí. Poslední vlákno napnuté po obvodu pavučiny má délku 2 m.



Kolik vláken je celkem použito v dekorační pavučině?

- 9) Pro $n \in \mathbb{N}$ je dána posloupnost vzorcem pro n -tý člen:

$$a_n = \frac{82 - 6n}{5}$$

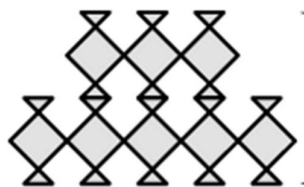
Určete součet prvních 25 členů dané posloupnosti.

- 10) Je dána konečná posloupnost krychlí. První krychle má délku hrany $a_1 = 6$ cm. Hrana každé další krychle je o 2 cm delší než hrana předchozí krychle. Určete, kolikrát je objem 24 . krychle větší než objem 11 . krychle?
- 11) Mozaika je tvořena řadami stejných ornamentů. První řada mozaiky obsahuje 3 ornamenty. Každá další řada obsahuje o 2 ornamenty více než předchozí řada. Poslední řada mozaiky obsahuje 99 krát více ornamentů než první řada.

Ornament



Mozaika



} první dvě řady

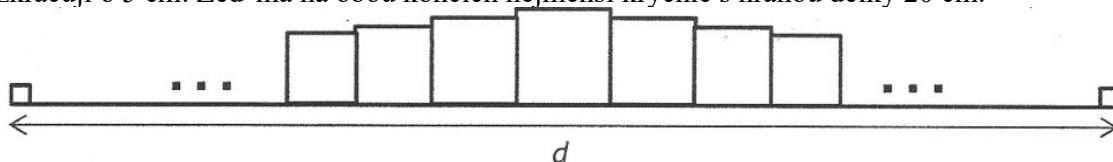
Kolik ornamentů obsahuje celá mozaika?

- 12) Na rovném drátě je navlečeno celkem 61 korálků tvaru koule. Uprostřed řady je největší korálek s průměrem 20 mm. Vedle něj jsou z každé strany dva korálky s průměrem 19 mm, potom dva korálky s průměrem 18 mm, dále dva korálky s průměrem 17 mm atd. V každé následující dvojici se průměr korálků o 1 mm zmenší. Mezi korálky nejsou žádné mezery.



Jak dlouhá je řada korálků?

- 13) Kocourkovská zeď je sestavena z krychlí. Uprostřed je největší krychle s hranou délky 200 cm. Vpravo i vlevo od ní se souměrně přidávají další krychle, jejichž hrany se postupně zkracují o 5 cm. Zeď má na obou koncích nejmenší krychle s hranou délky 20 cm.



Jak dlouhá je zeď?

Řešení

- 1) V aritmetické posloupnosti platí: $a_n = \frac{6+8n}{0,2}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jaká je diference posloupnosti?

Dosazením do vzorce určíme první dva členy a z nich diferenci:

$$a_1 = \frac{6+8 \cdot 1}{0,2} = 70$$

$$a_2 = \frac{6+8 \cdot 2}{0,2} = 110$$

$$d = a_2 - a_1 = 110 - 70 = 40$$

Diference posloupnosti je 40.

- 2) Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů, z nichž první tři jsou -140 ; -132 ; -124 a poslední tři 236 ; 244 ; 252 . Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 100.

$$a_1 = -140$$

Určíme diferenci:

$$d = a_2 - a_1 = -132 - (-140) = 8$$

Použijeme vzorec pro n -tý člen, hledáme n :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$100 = -140 + (n-1) \cdot 8$$

$$240 = 8n - 8$$

$$n = \frac{240+8}{8} = 31$$

Číslo 100 je 31. členem posloupnosti

- 3) Určete největší záporný člen aritmetické posloupnosti, jejímž prvním členem je číslo 100 a třetím členem je číslo 76.

$$a_1 = 100$$

$$a_3 = 76$$

$$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{100 - 76}{1 - 3} = -12$$

Nyní pomocí vzorce pro n -tý člen určíme, kterým členem by bylo číslo nula.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$0 = 100 + (n-1) \cdot (-12)$$

$$0 = 100 - 12n + 12$$

$$n = 9,33$$

Číslo nula není členem posloupnosti (9,33 není pořadovým číslem),
záporné členy tedy začínají až od 10. členu.

$$a_{10} = 100 + (10-1) \cdot (-12) = -8$$

Největší záporný člen je $a_{10} = -8$.

- 4) Trubky jsou srovnány v osmi řadách nad sebou tak, že vrchní řada má 13 trubek a každá další řada o 1 trubku více. Kolik je všech trubek?

$$a_1 = 13$$

$$d = 1$$

$$n = 8$$

$$a_8 = 13 + 7 \cdot 1 = 20$$

$$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (13 + 20) = 132$$

Všech trubek je 132

- 5) Posloupnost tvoří sedmnáct po sobě jdoucích přirozených lichých čísel seřazených vzestupně od nejmenšího k největšímu. Prostřední člen je číslo 23. Určete součet čtyř nejmenších členů.

$$a_9 = 23$$

$$d = 2$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$23 = a_1 + 8 \cdot 2$$

$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = 11$$

$$a_4 = 13$$

$$s_4 = 40$$

Součet čtyř nejmenších členů je 40.

- 6) Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří AP. Delší odvěsna je 24 cm. Určete obsah trojúhelníka.

$$24 - d; 24; 24 + d$$

$$(24 + d)^2 = (24 - d)^2 + 24^2$$

$$576 + 48d + d^2 = 576 - 48d + d^2 + 576$$

$$96d = 576$$

$$d = 6$$

$$a = 18; b = 24; c = 30$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$$

Obsah trojúhelníku je 216 cm².

- 7) Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Přepona je 30 cm. Určete odvěsny.

$$30 - 2d; 30 - d; 30$$

$$(30 - 2d)^2 + (30 - d)^2 = 30^2$$

$$900 - 120d + 4d^2 + 900 - 60d + d^2 = 900$$

$$5d^2 - 180d + 900 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-180)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 900 = 14400$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-180) \pm \sqrt{14400}}{2 \cdot 5}$$

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = 6$$

$$a = 18; b = 24; c = 30$$

Odvěsny mají délky 18 cm a 24 cm.

- 8) V husté dekorační pavučině jsou na drátěné konstrukci napnutá vlákna. Každé vlákno je napnuto kolem dokola a připevněno ke všem drátům konstrukce. Nejkratší vlákno je nejbližší středu a jeho délka je 24 cm. Každé další vlákno je o 4 mm delší než předchozí. Poslední vlákno napnuté po obvodu pavučiny má délku 2 m.

Kolik vláken je celkem použito v dekorační pavučině?

$$a_1 = 240 \text{ mm}$$

$$d = 4 \text{ mm}$$

$$a_n = 2000 \text{ mm}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$2000 = 240 + (n - 1) \cdot 4$$

$$n = 441$$

V dekorační pavučině je celkem 441 vláken.

- 9) Pro $n \in N$ je dána posloupnost vzorcem pro n -tý člen:

$$a_n = \frac{82 - 6n}{5}$$

Určete součet prvních 25 členů dané posloupnosti.

$$a_1 = \frac{82 - 6 \cdot 1}{5} = \frac{76}{5}$$

$$a_{25} = \frac{82 - 6 \cdot 25}{5} = -\frac{68}{5}$$

$$s_{25} = \frac{25}{2} \cdot \left(\frac{76}{5} + \left(-\frac{68}{5} \right) \right) = 20$$

Součet prvních 25 členů je 20.

- 10) Je dána konečná posloupnost krychlí. První krychle má délku hrany $a_1 = 6 \text{ cm}$. Hrana každé další krychle je o 2 cm delší než hrana předchozí krychle. Určete, kolikrát je objem 24. krychle větší než objem 11. krychle?

$$a_1 = 6$$

$$d = 2$$

$$a_{24} = 6 + 23 \cdot 2 = 52$$

$$a_{11} = 6 + 10 \cdot 2 = 26$$

$$V_{24} = a^3 = 52^3 = 140608$$

$$V_{11} = 26^3 = 17576$$

$$\frac{V_{24}}{V_{11}} = \frac{140608}{17576} = 8$$

Objem 24. krychle je osmkrát větší než objem 11. krychle.

- 11) Mozaika je tvořena řadami stejných ornamentů. První řada mozaiky obsahuje 3 ornamenty. Každá další řada obsahuje o 2 ornamenty více než předchozí řada. Poslední řada mozaiky obsahuje 99krát více ornamentů než první řada. **Kolik ornamentů obsahuje celá mozaika?**

$$a_1 = 3$$

$$d = 2$$

$$a_n = 3 \cdot 99 = 297$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$297 = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$n = 148$$

$$s_{148} = \frac{148}{2} \cdot (3 + 297) = 22200$$

Celá mozaika obsahuje 22 200 ornamentů.

- 12) Na rovném drátě je navlečeno celkem 61 korálek tvaru koule. Uprostřed řady je největší korálek s průměrem 20 mm. Vedle něj jsou z každé strany dva korálky s průměrem 19 mm, potom dva korálky s průměrem 18 mm, dále dva korálky s průměrem 17 mm atd. V každé následující dvojici se průměr korálek o 1 mm zmenší. Mezi korálky nejsou žádné mezery. Jak dlouhá je řada koráleků?

Hlavní je určit součet $19 + 18 + 17 + \dots$ celkem 15 členů.

Jedná se o aritmetickou posloupnost: $a_1 = 19; d = -1; n = 15$. Máme určit s_{15} a k tomu potřebujeme

$$a_{15}.$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 19 + 14 \cdot (-1) = 5$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

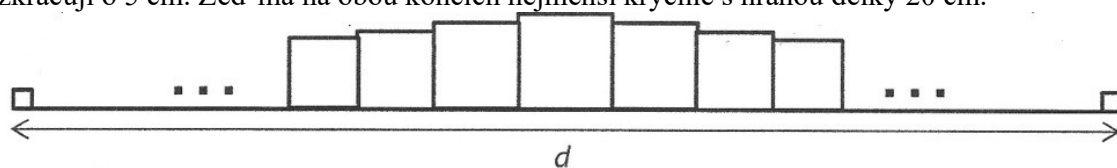
$$s_{15} = \frac{15}{2}(19 + 5) = 180$$

Tento součet se v obrázku vyskytuje čtyřikrát a k tomu jedna černá kulička o průměru 20 mm:

$$d = 4 \cdot 180 + 20 = 740 \text{ mm}$$

Řada koráleků měří 740 mm.

- 13) Kocourkovská zeď je sestavena z krychlí. Uprostřed je největší krychle s hranou délky 200 cm. Vpravo i vlevo od ní se souměrně přidávají další krychle, jejichž hrany se postupně zkracují o 5 cm. Zeď má na obou koncích nejmenší krychle s hranou délky 20 cm.



Jak dlouhá je zeď?

Hlavní úkol je určit součet $20 + 25 + \dots + 190 + 195$

Jedná se o aritmetickou posloupnost. $a_1 = 20$; $d = 2$; $a_n = 195$

Nejprve musíme určit kolik je členů:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$195 = 20 + (n-1) \cdot 5$$

$$175 = 5n - 5$$

$$n = 36$$

Tedy součet:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{36} = \frac{36}{2}(20 + 195)$$

$$s_{36} = 3870$$

Tento součet se ve zdi vyskytuje dvakrát plus prostřední krychle 200 cm.

$$d = 2 \cdot 3870 + 200 = 7940 \text{ cm} = 79,4 \text{ m}$$

Zeď je dlouhá 79,4 m.