MATEMATIKA

MAMZD22C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

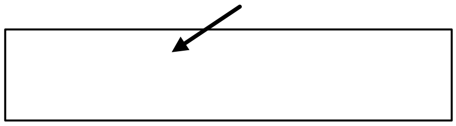
- **Didaktický test** obsahuje **25 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–14) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 15–25) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

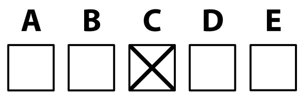
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1 

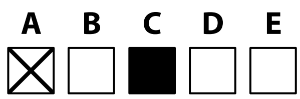
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.

17 

- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.

17 

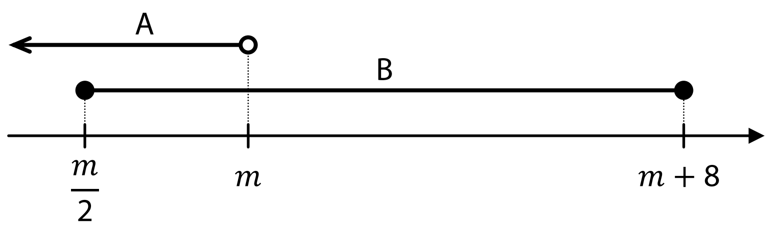
- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Na číselné ose jsou znázorněny intervaly A, B.

Platí: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (-\infty; 14\rangle$



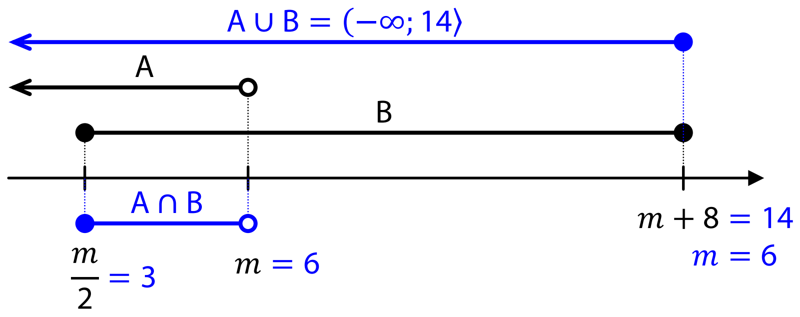
(CZVV)

1 bod

1 **Zapište intervalem** $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$**.**

Meze intervalu uveďte čísly, nesmějí obsahovat proměnnou m.

Řešení:



$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \langle \mathbf{3}; \mathbf{6})$

---

1 bod

2 **Určete množinu všech** $x \in \mathbf{R}$**, pro která má smysl výraz:**

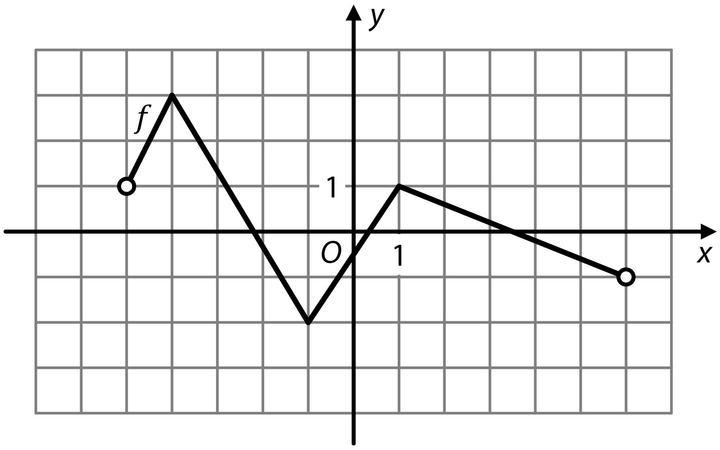
$$\frac{\sqrt{10 - 2x}}{\sqrt{x - 10}}$$

Řešení:

$$10 - 2x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 10 > 0$$
$$5 \geq x \quad \wedge \quad x > 10$$
$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\emptyset}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce f s definičním oborem $(-5; 6)$.



(Vrcholy lomené čáry jsou v mřížových bodech.)

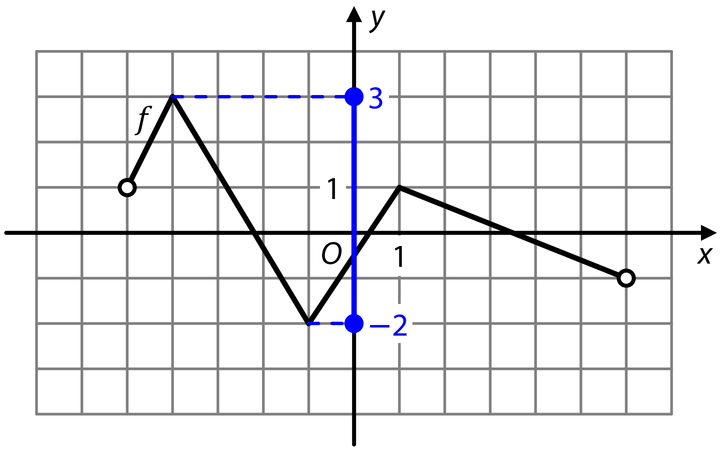
(*CZVV*)

1 bod

3 Zapište obor hodnot funkce f.

Řešení:

$\mathbf{H}_f = \langle -2; 3 \rangle$



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

V bedýnce jsou jogurty a rohlíky pro děti z letního tábora.
V bedýnce je x jogurtů a r-krát více rohlíků než jogurtů.
Jeden jogurt stál 10 korun a jeden rohlík 2 koruny.
Za všechny jogurty a rohlíky, které jsou v bedýnce, se zaplatilo dohromady p korun.

(x, r, p jsou z množiny kladných celých čísel.)

(CZVV)

max. 2 body

4 Vyjádřete počet jogurtů x v bedýnce v závislosti na veličinách r a p.

Řešení:

Produkt	počet kusů v bedýnce	celková cena (v korunách)
Jogurt	x	$10x$
Rohlík	rx	$2rx$
Celkem		$2rx + 10x$

$$2rx + 10x = p$$
$$x \cdot (2r + 10) = p$$
$$\boldsymbol{x = \frac{p}{2r + 10}}$$

max. 2 body

5 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\}$ zjednodušte:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{\frac{8}{x+2}}{x^2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{\frac{8}{x+2}}{x^2} =$$
$$\frac{x^2 - 2x + 4x - 8}{(x+2) \cdot x^2} + \frac{8}{(x+2) \cdot x^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+2) \cdot x^2} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot x^2} = \frac{1}{x}$$

max. 2 body

6 Je dán výraz:

$$\frac{1-x}{x-7}+1$$

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je hodnota daného výrazu záporná.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{1-x}{x-7}+1=\frac{1-x}{x-7}+\frac{x-7}{x-7}=\frac{-6}{x-7}$$

Čitatel lomeného výrazu je záporný, hodnota celého výrazu je tedy záporná, právě když je jmenovatel výrazu kladný:

$$x-7>0$$
$$x>7$$
$$x \in (7;+\infty)$$

---

max. 2 body

7 **V oboru R řešte:**

$$\frac{x+8}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{32}{x^2-1}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{x+8}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{32}{x^2-1}$$

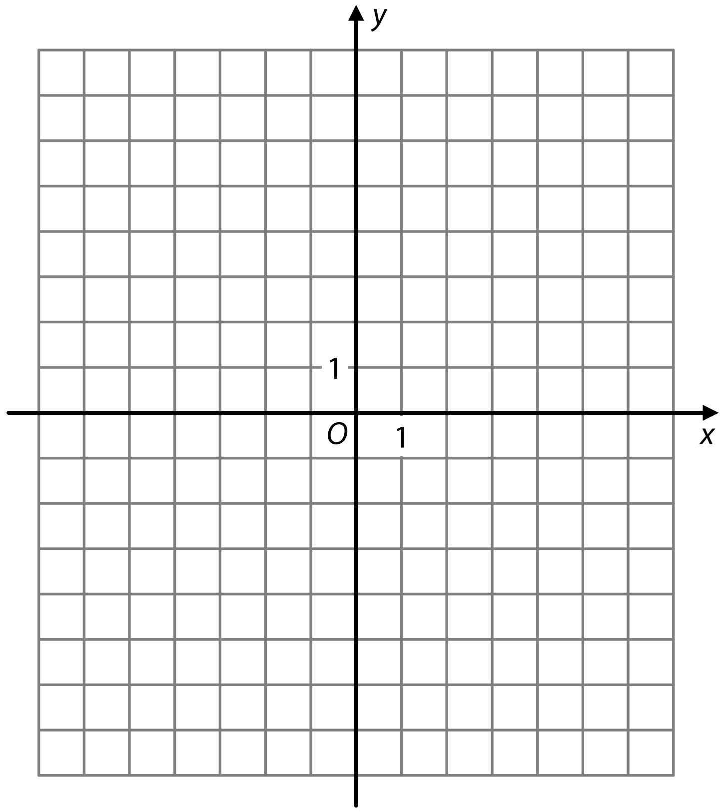
$$\frac{x+8}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{32}{(x+1)(x-1)} \quad \Big| \cdot (x+1)(x-1), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1;1\}$$

$$(x+8)(x+1)+x(x-1)=32$$
$$x^2+8x+x+8+x^2-x=32$$
$$2x^2+8x-24=0$$
$$x^2+4x-12=0$$
$$(x+6)(x-2)=0$$
$$x_1=-6, \qquad x_2=2$$
$$\mathrm{K}=\{-6;2\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Pro **rovnoramenný** trojúhelník *OPQ* se základnou *OP* platí:

Vrchol *O* leží v počátku kartézské soustavy souřadnic *Oxy*,
vrchol *P* je průsečík přímky *p*: $y = -0{,}5x + 3$ se souřadnicovou osou *x*,
vrchol *Q* leží na přímce *q*: $2x - y - 2 = 0$.



(CZVV)

max. 3 body

8

8.1 V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* zakreslete a popište bod *P*.

Řešení:

Do soustavy souřadnic zakreslíme přímku *p* a sestrojíme její průsečík se souřadnicovou osou *x* (viz obrázek k řešení úlohy 8.2).

Jiný způsob řešení:

Vypočteme souřadnice průsečíku *P* a zakreslíme jej do soustavy souřadnic.

Rovnice souřadnicové osy *x*: $y = 0$

$P \in p \cap x$: $y = -0{,}5x + 3$
$y = 0$

$0 = -0{,}5x + 3$
$y = 0$

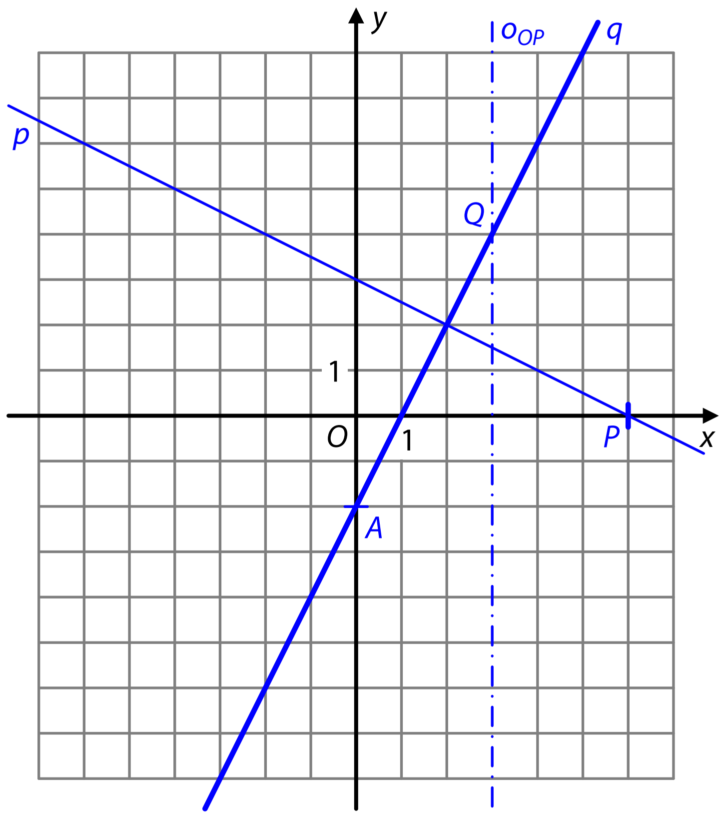
$x = 6$
$y = 0$

$P[6; 0]$

8.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy zakreslete a popište přímku q.

Řešení:

Přímka q: $2x - y - 2 = 0$
prochází např. bodem $A[0; -2]$,
její normálový vektor je $\vec{n} = (2; -1)$, a směrový vektor je tedy $\vec{u} = (1; 2)$.



V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

8.3 Určete obě souřadnice vrcholu $Q[q_1; q_2]$.

Řešení:

$Q \in q \cap o_{OP}$, kde o_{OP} je osa základny OP trojúhelníku OPQ (viz obrázek k řešení úlohy 8.2)

Q[3; 4]

Jiný způsob řešení:

Ramena OQ a PQ rovnoramenného trojúhelníku OPQ mají stejnou délku:

$$|OQ| = |PQ|, \qquad O[0; 0], P[6; 0], Q[q_1; q_2]$$

$$\sqrt{(q_1 - 0)^2 + (q_2 - 0)^2} = \sqrt{(q_1 - 6)^2 + (q_2 - 0)^2}$$

$$q_1^2 + q_2^2 = q_1^2 - 12q_1 + 36 + q_2^2$$

$$q_1 = 3$$

$$Q \in q: \quad 2q_1 - q_2 - 2 = 0$$

$$2 \cdot 3 - q_2 - 2 = 0$$

$$q_2 = 4$$

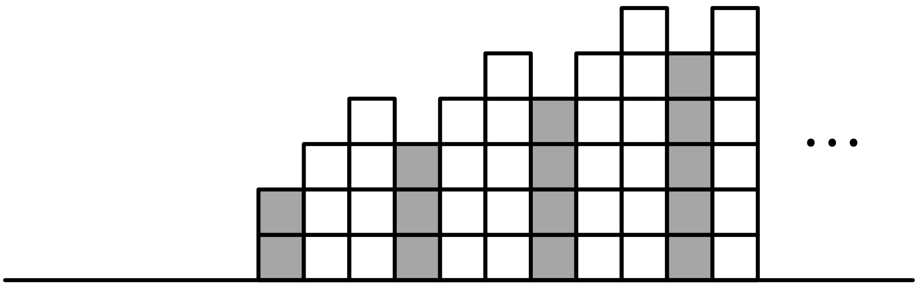
Q[3; 4]

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Obrazec obsahuje 1 000 sloupců vytvořených ze stejně velkých čtverců.
Pravidelně se v něm střídají jeden tmavý sloupec a dva bílé. Poslední sloupec je tmavý.

První sloupec je vytvořen ze 2 tmavých čtverců, další dva sloupce jsou ze 3 a 4 bílých čtverců.

Každá další trojice sloupců pak začíná tmavým sloupcem, který obsahuje o 1 čtverec méně než předchozí sloupec. Následují dva bílé sloupce, každý o 1 čtverec vyšší než předchozí.



(*CZVV*)

max. 2 body

9 Určete,

9.1 kolik čtverců obsahuje poslední sloupec obrazce,

9.2 kolik **tmavých** čtverců obsahuje celý obrazec.

Řešení:

První a poslední sloupec obrazce je tmavý, obrazec tedy obsahuje 334 tmavých sloupců ($1\,000 = 3 \cdot 333 + 1$).

Počty čtverců v tmavých sloupcích (zleva doprava) tvoří konečnou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{334}$, v níž platí:

$a_1 = 2, \qquad d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

součet prvních n členů: $\quad s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Pro $n = 334$ dostaneme:

9.1 Počet čtverců v posledním (tmavém) sloupci: $\quad a_{334} = a_1 + 333d = 2 + 333 = \mathbf{335}$

9.2 Počet všech tmavých čtverců v obrazci:

$$s_{334} = \frac{334}{2} \cdot (a_1 + a_{334}) = 167 \cdot (2 + 335) = \mathbf{56\,279}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

V osudí je 9 míčků. Každý z nich je označen právě jedním přirozeným číslem od 1 do 9. Žádné dva míčky nejsou označeny stejným číslem.

Z osudí postupně vylosujeme 7 míčků, které nevracíme zpět.

(CZVV)

1 bod

10 Vypočtěte pravděpodobnost, že oba míčky, které zbudou v osudí, jsou označeny sudými čísly.

Řešení:

Počet všech dvojic míčků, které mohou zbýt v osudí: $\binom{9}{2}$

V osudí jsou 4 míčky označeny sudým číslem. Vybereme z nich dva, které mají zbýt v osudí (požadovaný jev označíme S).

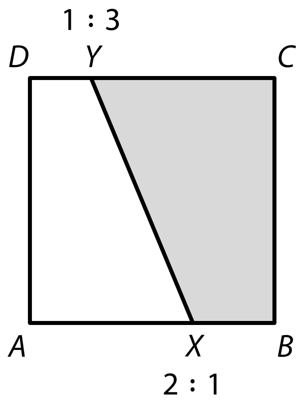
Počet výsledků příznivých jevu S: $\binom{4}{2}$

Pravděpodobnost jevu S: $P(S) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{6}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 11–12

Čtverec *ABCD* je úsečkou *XY* rozdělen na dva lichoběžníky – bílý *AXYD* a šedý *XBCY*.

Bod *X* dělí stranu *AB* na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru $|AX| : |XB| = 2 : 1$.
Bod *Y* dělí stranu *CD* na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru $|DY| : |YC| = 1 : 3$.



(CZVV)

1 bod

11 Vypočtěte a zapište v základním tvaru poměr délek obou základen bílého lichoběžníku *AXYD*.

Řešení:

Poměry délek úseček rozšíříme tak, aby 1 díl strany *AB* i *CD* byl stejně dlouhý. Obě strany tedy budou rozděleny na 12 stejných dílů.

Strana *AB*: $|AX| : |XB| = 2 : 1 = 8 : 4$, $\quad 8 + 4 = 12$

Strana *CD*: $|DY| : |YC| = 1 : 3 = 3 : 9$, $\quad 3 + 9 = 12$

Poměr délek základen bílého lichoběžníku: $\boldsymbol{|AX| : |DY| = 8 : 3}$

max. 2 body

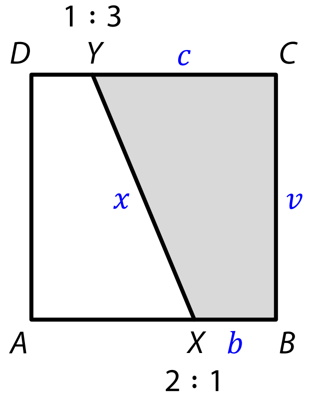
12 Šedý lichoběžník *XBCY* má výšku 36 cm.

Vypočtěte

12.1 v cm^2 obsah šedého lichoběžníku *XBCY*,

12.2 v cm obvod šedého lichoběžníku *XBCY*.

Řešení:



Délky základen *XB*, *YC* lichoběžníku *XBCY* označíme po řadě b, c, délku ramene *XY* označíme x. Výška v lichoběžníku je současně délkou ramene *BC*, a tedy délkou strany čtverce *ABCD*.

Platí:

$$b = \frac{1}{3}|AB|, \qquad c = \frac{3}{4}|CD|, \qquad |AB| = |BC| = |CD| = v = 36\text{ cm}$$

$$b = \frac{1}{3}v = 12\text{ cm}, \qquad c = \frac{3}{4}v = 27\text{ cm}$$

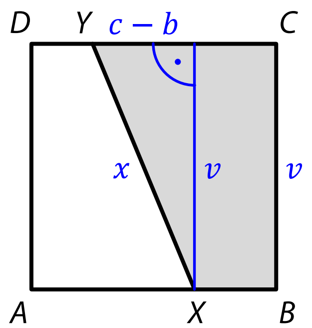
12.1 Obsah šedého lichoběžníku:

$$S = \frac{b+c}{2}\cdot v = \frac{12\text{ cm} + 27\text{ cm}}{2}\cdot 36\text{ cm} = \mathbf{702\ cm^2}$$

případně

$$S = \frac{b+c}{2}\cdot v = \frac{\frac{1}{3}v + \frac{3}{4}v}{2}\cdot v = \frac{\frac{4+9}{12}\cdot v}{2}\cdot v = \frac{13}{24}v^2 = \frac{13}{24}\cdot 36^2\text{ cm}^2 = \mathbf{702\ cm^2}$$

12.2 Pravoúhlý lichoběžník *XBCY* rozdělíme výškou na obdélník a pravoúhlý trojúhelník.



Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku mají délky v a $c - b$. Pro délku x přepony platí:

$$x^2 = v^2 + (c-b)^2$$

$$x = \sqrt{v^2 + (c-b)^2} = \sqrt{36^2 + (27-12)^2}\text{ cm} = 39\text{ cm}$$

Obvod šedého lichoběžníku:

$$o = b + v + c + x = 12\text{ cm} + 36\text{ cm} + 27\text{ cm} + 39\text{ cm} = \mathbf{114\ cm}$$

případně

$$x^2 = v^2 + (c-b)^2, \qquad b = \frac{1}{3}v, \qquad c = \frac{3}{4}v, \qquad v = 36\text{ cm}$$

$$x^2 = v^2 + \left(\frac{3}{4}v - \frac{1}{3}v\right)^2 = v^2 + \left(\frac{9-4}{12}\cdot v\right)^2 = v^2 + \frac{25}{144}v^2 = \frac{169}{144}v^2, \qquad x = \frac{13}{12}v$$

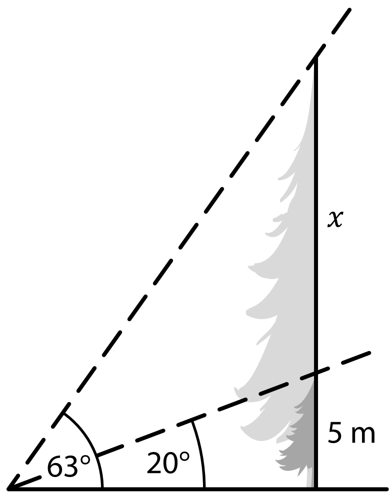
$$o = b + v + c + x$$

$$o = \frac{1}{3}v + v + \frac{3}{4}v + \frac{13}{12}v = \frac{4+12+9+13}{12}\cdot v = \frac{38}{12}v = \frac{38}{12}\cdot 36\text{ cm} = \mathbf{114\ cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Chlapec viděl z okna sklípku pod výškovým úhlem 20° vrchol stromu vysokého 5 m. Strom roste stále svisle. Pata stromu a místo pozorování leží v téže vodorovné rovině.

Po 60 letech viděl jeho vnuk ze stejného místa vrchol téhož stromu pod výškovým úhlem 63°. Během této doby strom vyrostl o x metrů.



(CZVV)

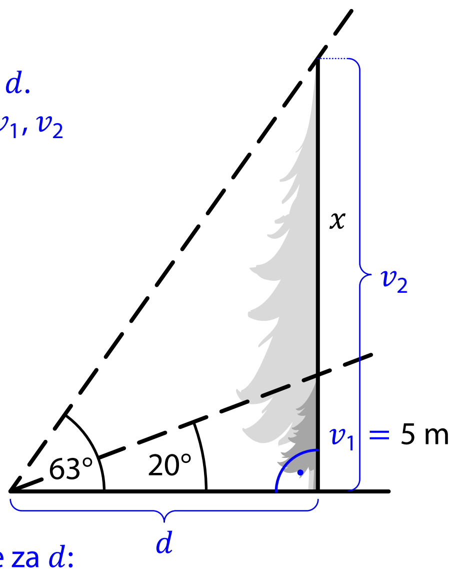
max. 2 body

13 Vypočtěte, o kolik metrů vyrostl strom během uvedených 60 let.
Výsledek x zaokrouhlete na celé číslo, dílčí výpočty nezaokrouhlujte.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Vzdálenost místa pozorování od paty stromu označíme d.
Výšky stromu při jednotlivých pozorováních označíme v_1, v_2 a příslušné výškové úhly φ_1, φ_2.



Platí:

$v_1 = 5\text{ m},\qquad v_2 = v_1 + x$

$\varphi_1 = 20°,\qquad \varphi_2 = 63°$

Místo pozorování, pata stromu a vrchol stromu tvoří při jednotlivých pozorováních vrcholy pravoúhlého trojúhelníku (viz obrázek). V trojúhelnících platí:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{v_1}{d},\qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{v_2}{d}$$

Z prvního vztahu vyjádříme d, z druhého v_2 a dosadíme za d:

$$d = \frac{v_1}{\operatorname{tg}\varphi_1},\qquad v_2 = d\cdot\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{v_1}{\operatorname{tg}\varphi_1}\cdot\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}\cdot v_1$$

Rozdíl výšek:

$$x = v_2 - v_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}\cdot v_1 - v_1 = \frac{\operatorname{tg}63°}{\operatorname{tg}20°}\cdot 5\text{ m} - 5\text{ m} \doteq 22\text{ m}$$

Strom během uvedených 60 let vyrostl o 22 metrů.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Odměna 25 200 korun se rozdělila rovným dílem mezi všechny brigádníky. Kdyby bylo o 5 brigádníků více, na každého by vyšla odměna o 1 000 korun menší. (*CZVV*)

max. 3 body

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte, kolik korun dostal každý brigádník.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Počet brigádníků označíme b ($b > 0$).

Odměna jednoho brigádníka (v korunách): $\dfrac{25\,200}{b}$

Kdyby bylo o 5 brigádníků více než b (tj. $b + 5$),

na každého by vyšla odměna o 1 000 korun menší než $\dfrac{25\,200}{b}$, tedy platí:

$$\frac{25\,200}{b+5} = \frac{25\,200}{b} - 1\,000$$

$$\frac{25{,}2}{b+5} = \frac{25{,}2}{b} - 1 \quad \Big| \cdot b(b+5), \qquad b > 0$$

$$25{,}2b = 25{,}2 \cdot (b+5) - b(b+5)$$

$$25{,}2b = 25{,}2b + 126 - b^2 - 5b$$

$$b^2 + 5b - 126 = 0$$

$$(b-9)(b+14) = 0$$

$$b = 9 \quad \vee \quad b = -14 < 0$$

Odměna každého z 9 brigádníků (v korunách): $\dfrac{25\,200}{9} = 2\,800$

Každý brigádník dostal 2 800 korun.

VÝCHOZÍ TEXTY K ÚLOHÁM 15.1–15.3

15.1	Boty byly v únoru o 50 % levnější než v lednu a v březnu se jejich cena zvýšila na 150 % únorové ceny.
15.2	Původní cena jablek se snížila nejprve o 20 % a poté o 25 % již snížené ceny.
15.3	Obchodník prodal 40 % švestek za plnou cenu a zbývající švestky s 25% slevou.

(CZVV)

max. 3 body

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
15.1	Ceny bot v lednu a březnu byly stejné.	☐	☒
15.2	Po obou slevách tvořila cena jablek 60 % původní ceny.	☒	☐
15.3	Obchodník utržil za švestky tolik, jako by je všechny prodal s 15% slevou.	☒	☐

Řešení:

15.1 Cenu bot v lednu označíme b ($b > 0$).
Cena bot v únoru: $b - 0{,}5b = 0{,}5b$
Cena bot v březnu: $1{,}5 \cdot 0{,}5b = 0{,}75b$, tj. 75 % lednové ceny

Tvrzení 15.1 je **nepravdivé**.

15.2 Původní cenu jablek označíme j ($j > 0$).
Cena jablek po první slevě: $(1 - 0{,}2) \cdot j = 0{,}8j$
Cena jablek po druhé slevě: $(1 - 0{,}25) \cdot 0{,}8j = 0{,}6j$, tj. 60 % původní ceny

Tvrzení 15.2 je **pravdivé**.

15.3 Hodnotu všech obchodníkových švestek v plné ceně označíme s ($s > 0$).
Tržba za švestky prodané v plné ceně: $0{,}4s$
Tržba za švestky prodané s 25% slevou: $0{,}75 \cdot 0{,}6s = 0{,}45s$
Celková tržba: $0{,}4s + 0{,}45s = 0{,}85s$, tj. hodnota všech švestek s 15% slevou

Tvrzení 15.3 je **pravdivé**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

U každé z následujících tří rovnic určíme počet všech jejích řešení v oboru **R**.

I. $2^{2x} + 2 = 0$

II. $\dfrac{(2x+2)(x+2)}{(x+1)^2} = 0$

III. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

(CZVV)

2 body

16 Právě jedno řešení

A) má pouze I. rovnice.

B) má pouze II. rovnice.

C) má pouze III. rovnice.

D) mají alespoň dvě z uvedených rovnic.

E) nemá žádná z uvedených rovnic.

Řešení:

I.

$$2^{2x} + 2 = 0$$
$$2^{2x} = -2$$

Výraz 2^{2x} na levé straně rovnice je pro všechna $x \in \mathbf{R}$ kladný, rovnost nenastane.
Rovnice nemá žádné řešení.

II.

$$\frac{(2x+2)(x+2)}{(x+1)^2} = 0, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$
$$\frac{2 \cdot (x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = 0$$
$$\frac{2 \cdot (x+2)}{x+1} = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Rovnice má právě jedno řešení.

III.

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$
$$0 = \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}$$
$$0 = \frac{x}{x}$$
$$0 = 1$$

Rovnice nemá žádné řešení.

Právě jedno řešení má pouze II. rovnice.

2 body

17 V intervalu $(0; 2\pi)$ je řešena rovnice:

$$\frac{1}{\cos x} = 2$$

Která z množin obsahuje <u>všechna</u> řešení dané rovnice?

A) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$

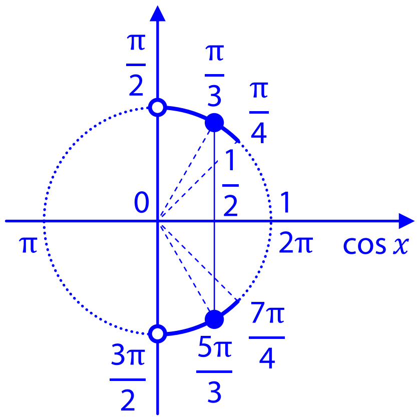
B) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$

C) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$

D) $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$

E) žádná z uvedených množin

Řešení:



$$\frac{1}{\cos x} = 2, \qquad \cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{2} = \cos x$$

Využijeme vlastností funkce kosinus a známé hodnoty

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (viz obrázek): $\quad x = \frac{\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{3}$

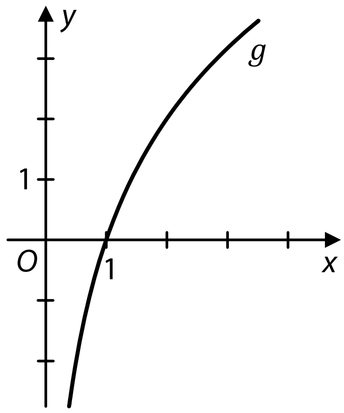
$$K = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Obě řešení rovnice obsahuje množina $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce $g: y = \log_a x$ s definičním oborem $(0; +\infty)$, pro kterou platí:

$\log_a 2 = 2$



(CZVV)

2 body

18 Která z následujících rovností platí pro funkci g?

A) $\log_a \sqrt{2} = \sqrt{2}$

B) $\log_a \sqrt{8} = \sqrt{8}$

C) $\log_a 4 = 4$

D) $\log_a 8 = 8$

E) žádná z uvedených rovností

Řešení:

Výraz na levé straně každé z nabízených rovností upravíme pomocí vět o logaritmech a užijeme vztah $\log_a 2 = 2$, který platí pro funkci g.

A) $\log_a \sqrt{2} = \log_a 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_a 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \neq \sqrt{2}$

B) $\log_a \sqrt{8} = \log_a 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \log_a 2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \neq \sqrt{8}$

C) $\boldsymbol{\log_a 4} = \log_a 2^2 = 2 \cdot \log_a 2 = 2 \cdot 2 = \mathbf{4}$

D) $\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \cdot \log_a 2 = 3 \cdot 2 = 6 \neq 8$

Jiný způsob řešení

Určíme základ a logaritmické funkce g:

$\log_a 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2, \qquad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$

$a = \sqrt{2}$

Vypočteme hodnotu výrazu na levé straně každé z nabízených rovností pro $a = \sqrt{2}$.

A) $\log_a \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1 \neq \sqrt{2}$

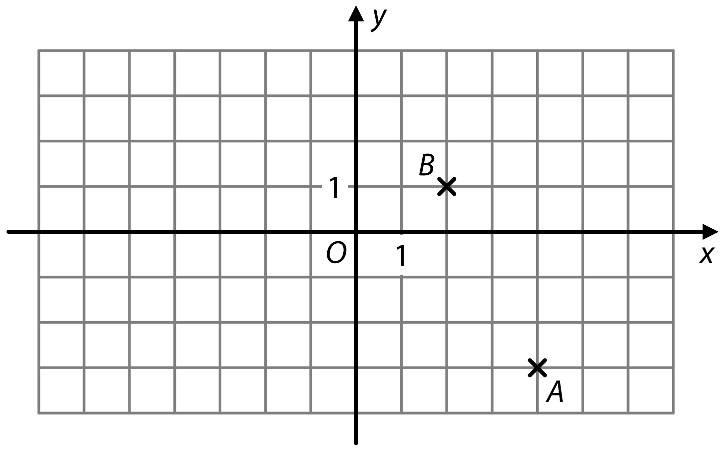
B) $\log_a \sqrt{8} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = 3 \neq \sqrt{8}$

C) $\boldsymbol{\log_a 4} = \log_{\sqrt{2}} 4 = \mathbf{4}$

D) $\log_a 8 = \log_{\sqrt{2}} 8 = 6 \neq 8$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou vyznačeny dva mřížové body *A*, *B*.
Grafem funkce h je parabola s vrcholem *A* procházející bodem *B*.



(CZVV)

2 body

19 Jaký je předpis funkce h?

A) $y = -2x + 5$

B) $y = x^2 - 8x + 13$

C) $y = -x^2 + 4x - 3$

D) $y = \dfrac{x - 1}{3 - x}$

E) $y = \dfrac{3x - 9}{x - 5}$

Řešení:

Posuneme-li graf kvadratické funkce $y = kx^2$ sestrojený v kartézské soustavě souřadnic *Oxy* tak, aby vrchol paraboly byl v bodě $A[a_1; a_2]$, získáme graf kvadratické funkce s předpisem $y = k(x - a_1)^2 + a_2$

Pro vrchol $A[4; -3]$ má funkce h předpis:

$y = k(x - 4)^2 - 3$

Graf funkce h prochází bodem $B[2; 1]$, tedy platí:

$1 = k(2 - 4)^2 - 3$
$4 = k \cdot (-2)^2$
$1 = k$

Předpis funkce h:

$y = 1 \cdot (x - 4)^2 - 3$
$y = x^2 - 8x + 16 - 3$
$y = x^2 - 8x + 13$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n = 7$.
V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je první člen $b_1 = -8$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_{n+1} = b_n + 3$.

(CZVV)

2 body

20 O kolik se liší součet prvních 10 členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a součet prvních 10 členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$?

A) o 6

B) o 12

C) o 15

D) o 18

E) o jiný počet

Řešení:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, všechny její členy jsou rovny prvnímu členu $a_1 = 7$.
Součet prvních n členů této posloupnosti: $s_n = n \cdot a_1$

Pro $n = 10$ dostaneme: $s_{10} = 10 \cdot a_1 = 10 \cdot 7 = 70$

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen vždy o 3 větší než člen předcházející, jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 3$. První člen je $b_1 = -8$.
Součet prvních n členů této posloupnosti: $s'_n = \frac{n}{2} \cdot (b_1 + b_n)$, kde $b_n = b_1 + (n-1) \cdot d$

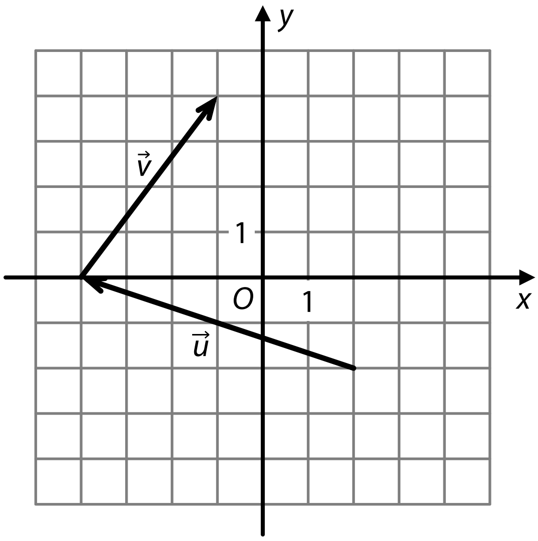
Pro $n = 10$ dostaneme: $b_{10} = b_1 + 9d = -8 + 9 \cdot 3 = 19$

$$s'_{10} = \frac{10}{2} \cdot (b_1 + b_{10}) = \frac{10}{2} \cdot (-8 + 19) = 55$$

Rozdíl součtů: $s_{10} - s'_{10} = 70 - 55 = 15$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou umístěny vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
(Počáteční i koncové body umístění těchto vektorů jsou v mřížových bodech.)



(CZVV)

2 body

21 Směrovým vektorem přímky *p* je součet vektorů $\vec{u} + \vec{v}$.

Který z následujících vektorů je normálovým vektorem přímky *p*?

A) $\vec{a} = (2; 1)$

B) $\vec{b} = (2; -1)$

C) $\vec{c} = (-1; -2)$

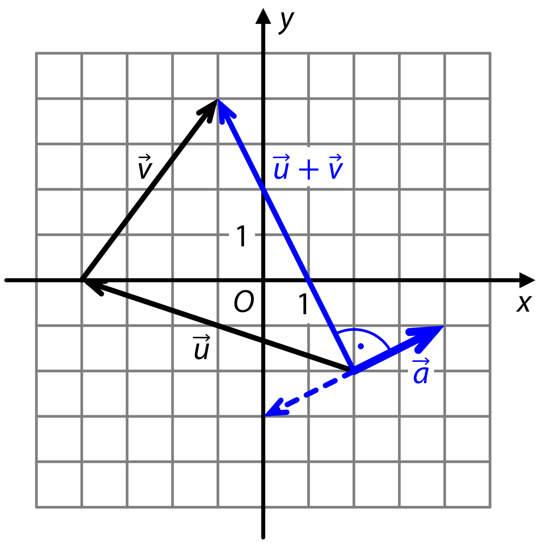
D) $\vec{d} = (1; -2)$

E) žádný z uvedených vektorů

Řešení:

Směrový a normálový vektor přímky *p* jsou navzájem kolmé.

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* zakreslíme součet vektorů $\vec{u} + \vec{v}$ a vytvoříme k němu kolmý vektor (viz obrázek).



případně

Z obrázku získáme souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a vypočteme jejich součet:

$\vec{u} = (-6; 2)$, $\quad \vec{v} = (3; 4)$

$\vec{u} + \vec{v} = (-3; 6)$

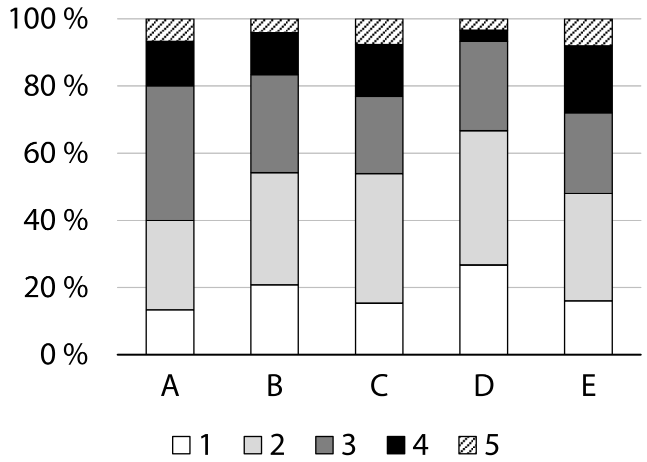
Souřadnice libovolného vektoru kolmého k součtu vektorů $\vec{u} + \vec{v}$ lze zapsat ve tvaru:
$k \cdot (6; 3)$, kde $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Pro $k = \frac{1}{3}$ dostaneme vektor $\vec{a} = (2; 1)$.

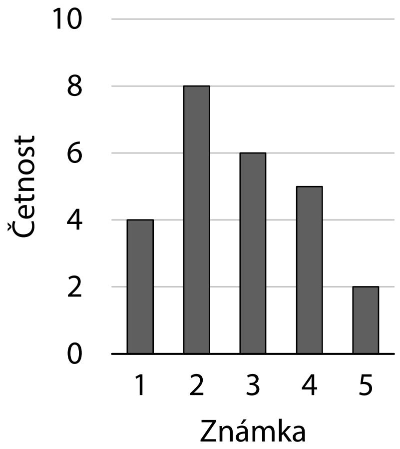
VÝCHOZÍ TEXT A GRAFY K ÚLOZE 22

Graf 1 udává rozložení četností známek z matematiky v každé z pěti tříd (A–E).
Graf 2 udává četnosti známek z matematiky v jedné z těchto pěti tříd.

Graf 1



Graf 2



(*CZVV*)

2 body

22 Které z pěti tříd (A–E) z grafu 1 odpovídá graf 2?

A) A

B) B

C) C

D) D

E) E

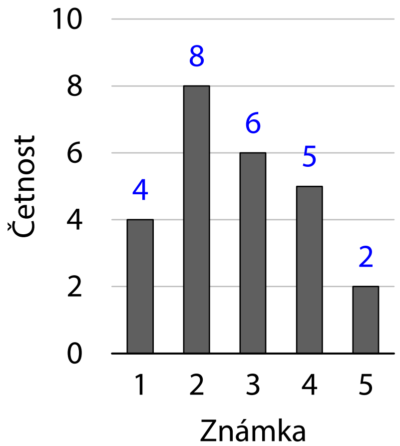
Řešení:

V grafu 2 určíme četnosti známek v posuzované třídě.
Ve třídě je celkem 25 žáků ($4 + 8 + 6 + 5 + 2 = 25$).

Známkou 1 bylo hodnoceno méně než 20 % žáků třídy.
Tomu odpovídají v grafu 1 sloupce tříd A, C nebo E.

Známkami 1 nebo 2 bylo hodnoceno celkem 12 žáků,
tj. více než 40 %, ale méně než 50 % žáků třídy.
Tomu odpovídá pouze sloupec třídy E.

Graf 2



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Karel má na zámku u kola kód se 6 znaky.

Na prvním i druhém místě kódu je možné nastavit kterékoli z 5 možných písmen A, B, C, D, E a na každém z dalších čtyř míst libovolnou číslici od 1 do 9.

Karel správný kód zapomněl, pamatuje si pouze, že první písmeno je E a poslední číslice 7. Pokouší se zámek otevřít tak, že (bez prodlev) nastavuje navzájem různé kódy začínající písmenem E a končící číslicí 7 (např. EB7897, EE1117).

(CZVV)

2 body

23 Předpokládejme, že nastavení a ověření každého kódu trvá Karlovi 1 sekundu.

Jak dlouho může Karlovi <u>nejvýše</u> trvat otevření zámku?

A) méně než 40 minut

B) alespoň 40 minut, ale méně než 50 minut

C) alespoň 50 minut, ale méně než 60 minut

D) alespoň 60 minut, ale méně než 70 minut

E) alespoň 70 minut

Řešení:

Otevření zámku bude Karlovi trvat nejdéle, bude-li muset vyzkoušet všechny možné kódy splňující uvedené podmínky (začínají písmenem E a končí číslicí 7), tedy ten správný kód bude až posledním vyzkoušeným.

Karel nastavuje znaky pouze na 4 pozicích v kódu (2., 3., 4. a 5. místo), písmeno na 1. místě a číslice na 6. místě jsou ve všech zkoušených kódech stejné.

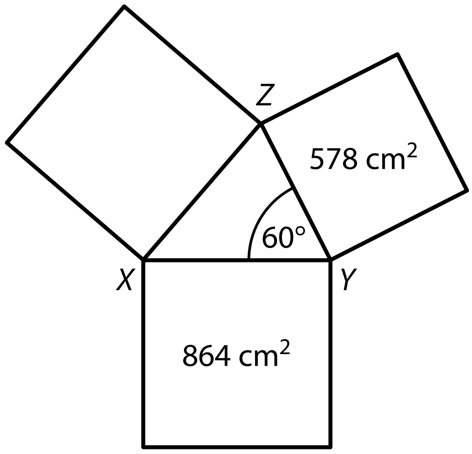
Počet všech různých kódů k ověření: $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 3\,645$
(Užili jsme kombinatorického pravidla součinu.)

Ověření všech těchto kódů bude Karlovi trvat 3 645 sekund, tj. 60 minut a 45 sekund.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 24

Tři čtverce, z nichž každé dva mají právě jeden společný vrchol, vymezují trojúhelník *XYZ*.

V obrázku jsou uvedeny obsahy dvou čtverců a velikost vnitřního úhlu trojúhelníku *XYZ*.



(*CZVV*)

2 body

24 Jaký je obsah trojúhelníku *XYZ*?

A) menší než 285 cm^2

B) 286 cm^2

C) 306 cm^2

D) 353 cm^2

E) větší než 354 cm^2

Řešení:

Délky stran *XY* a *YZ* trojúhelníku *XYZ* označíme z, x a velikost vnitřního úhlu *XYZ* označíme φ.

Pro obsahy čtverců nad stranami *YZ* a *XY* platí:

$x^2 = 578\ \text{cm}^2, \qquad z^2 = 864\ \text{cm}^2$

Délky stran trojúhelníku:

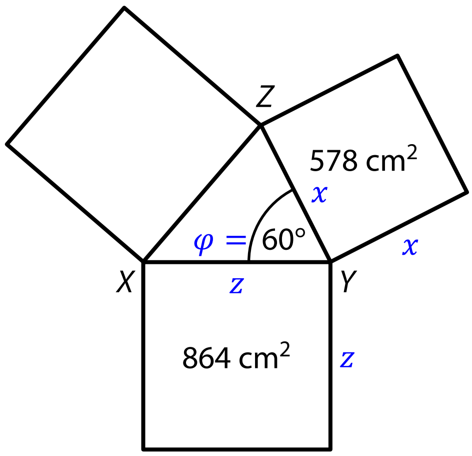
$x = \sqrt{578}\ \text{cm} = 17\sqrt{2}\ \text{cm}$

$z = \sqrt{864}\ \text{cm} = 12\sqrt{6}\ \text{cm}$

Obsah trojúhelníku *XYZ*:

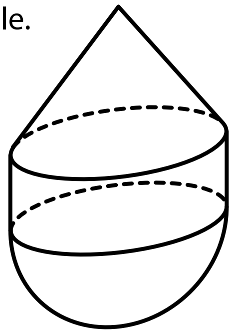
$S = \frac{1}{2} xz \sin\varphi\,, \qquad \varphi = 60°$

$S = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{6} \cdot \sin 60°\ \text{cm}^2 = 17 \cdot 6 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 17 \cdot 3 \cdot \sqrt{36}\ \text{cm}^2 = 306\ \text{cm}^2$



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

Těleso se skládá ze tří částí – rotačního kužele, rotačního válce a polokoule.
Výška kužele je 4 cm a výška válce je 2 cm.
Poloměr podstavy kužele, válce i polokoule je 3 cm.
Podstavy sousedních částí splývají.



(*CZVV*)

max. 4 body

25 Ke každé otázce (25.1–25.2) přiřaďte správnou odpověď (A–F).

25.1 Jakou část objemu celého tělesa tvoří objem válce? E

25.2 Jakou část povrchu celého tělesa tvoří obsah pláště kužele? D

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{3}{11}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{3}{8}$

F) jinou část

Řešení:

Poloměr podstavy kužele, válce i polokoule označíme r, výšku válce v a výšku kužele w.

Platí: $r = 3$ cm, $v = 2$ cm, $w = 4$ cm

25.1 Objem kužele: $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 w$

Objem válce: $V_v = \pi r^2 v$

Objem polokoule: $V_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

Podíl objemu válce a objemu celého tělesa:

$$\frac{V_v}{V_k + V_v + V_p} = \frac{\pi r^2 v}{\frac{1}{3}\pi r^2 w + \pi r^2 v + \frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{v}{\frac{1}{3}w + v + \frac{2}{3}r} = \frac{3v}{w + 3v + 2r} =$$

$$\frac{3 \cdot 2\text{ cm}}{4\text{ cm} + 3 \cdot 2\text{ cm} + 2 \cdot 3\text{ cm}} = \frac{6}{4 + 6 + 6} = \frac{3}{8}$$

25.2 Povrch tělesa se skládá z obsahů pláště kužele, pláště válce a kulového vrchlíku tvaru polokoule. Obsah tohoto kulového vrchlíku je polovinou povrchu koule.

Strana kužele s poloměrem podstavy $r = 3$ cm a výškou $w = 4$ cm:

$s = \sqrt{r^2 + w^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$

Obsah pláště kužele: $S_\text{k} = \pi r s$

Obsah pláště válce: $S_\text{v} = 2\pi r v$

Obsah kulového vrchlíku: $S_\text{p} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

Podíl obsahu pláště kužele a povrchu celého tělesa:

$$\frac{S_\text{k}}{S_\text{k} + S_\text{v} + S_\text{p}} = \frac{\pi r s}{\pi r s + 2\pi r v + 2\pi r^2} = \frac{s}{s + 2v + 2r} = \frac{5\ \text{cm}}{5\ \text{cm} + 2 \cdot 2\ \text{cm} + 2 \cdot 3\ \text{cm}} =$$

$$\frac{5}{5 + 4 + 6} = \frac{1}{3}$$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.