Kombinatorika

Základní úloha kombinatoriky - určení počtu všech skupin sestavených podle daných pravidel z daných prvků. Tj. určit, kolik existuje skupin obsahujících *k* prvků vybraných z *n* prvků.

1. Záleží na pořadí prvků ve skupinách

U těchto příkladů **lze vždy** použít kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 způsoby a jejichž druhý člen lze po výběru prvního členu vybrat právě n_2 způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2$.

Toto pravidlo lze zobecnit pro libovolné uspořádané *k*-tice.

Příklady

1) Určete, kolik dvojjazyčných slovníků je třeba vydat, aby byla zajištěna možnost přímého překladu z AJ, NJ, RJ a FJ do každého z nich.

1. jazyk	2. jazyk
4 možnosti	**3 možnosti** (nemá smysl slovník např. AJ do AJ)

Výpočet: $4 \cdot 3 = 12$

Musí se vydat 12 slovníků.

2) Ve třídě je 15 děvčat a 12 chlapců. Kolik tanečních dvojic chlapec – děvče je možné ze studentů třídy sestavit?

chlapecká část dvojice	dívčí část dvojice
12 možností	**15 možnosti**

Výpočet: $12 \cdot 15 = 180$

Je možné sestavit 180 dvojic.

3) V kódu je na prvním místě jedno z písmen A, B, C, D nebo E. Na dalších dvou pozicích je libovolné dvojciferné číslo od 13 do 63. (Existují např. kódy B22, A45 apod.) Určete počet všech takto vytvořených kódů.

písmeno	dvojciferné číslo od 13 do 63
5 možností	**51 možností** (63 – 12)

Výpočet: $5 \cdot 51 = 255$

Existuje 255 kódů vytvořených podle uvedených pravidel.

4) Kolik různých pěticiferných přirozených čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4?

1. cifra (desetitisíce)	2. cifra (tisíce)	3. cifra (stovky)	4. cifra (desítky)	5. cifra (jednotky)
na začátku nemůže být nula, proto pouze **4 možnosti**	už může být i nula, ale jedna cifra už je použita, proto **4 možnosti**	už jsou využity dvě cifry **3 možnosti**	**2 možnosti**	**1 možnost**

Výpočet: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

Lze sestavit 96 pěticiferných čísel.

Důležité pojmy

Variace *k*-třídy z *n*-prvků

Pokud se v jednotlivých skupinách prvky nemůžou opakovat (a záleží na pořadí prvků), pak se tyto skupiny nazývají variace *k*-třídy z *n*-prvků a jejich počet lze určit (kromě pravidla součinu) vzorcem $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ a také tlačítkem nPr na kalkulačce.

Permutace
Permutace z *n* prvků je každá variace *n*-té třídy sestavená z těchto *n* prvků. Je to tedy uspořádaná *n*-tice sestavená z *n* prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou (prvky se tedy pouze přehazují).
Počet permutací z *n* prvků lze určit (kromě pravidla součinu) také vzorcem $P(n) = n!$

Variace *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním
Variace *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním je každá uspořádaná *k*-tice sestavená pouze z těchto *n* prvků (chybí podmínka, že prvky se nemohou opakovat). Počet všech variací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním lze určit (kromě pravidla součinu) také vzorcem $V'(k,n) = n^k$.

Faktoriál
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ pro každé celé kladné číslo
$0! = 1$
Např.: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

2. Nezáleží na pořadí prvků ve skupinách

Skupiny prvků, u nichž nezáleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat, se nazývají kombinace.
Kombinace *k*-té třídy z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z *n*-prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Pro počet $K(k,n)$ všech kombinací *k*-té třídy z *n* prvků platí: $K(k,n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.

$\binom{n}{k}$ kombinační číslo *n* nad *k*, $n \geq k$.

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ lze určit na kalkulačce pomocí tlačítka nCr (nejprve se zadá *n*, pak se stiskne tlačítko nCr a pak se zadá *k*).

Např. $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{8}{2} = 28$

Příklady

1) Kolik různých pětičlenných družstev lze sestavit z deseti nejlepších sportovců třídy?
$\binom{10}{5} = 252$

3. Smíšené příklady

1) Ve třídě je 18 chlapců a 6 dívek. Kolik smíšených družstev složených ze tří chlapců a dvou dívek lze vytvořit?

chlapecká část družstva	dívčí část družstva
$\binom{18}{3} = 816$ **možností**	$\binom{6}{2} = 15$ **možností**

Pravidlo součinu: $816 \cdot 15 = 12240$
Lze vytvořit 12 240 družstev.

2) Pavel si vylosuje jednu otázku ze skupiny 10 praktických otázek a dále dvojici otázek z jiné skupiny 20 teoretických otázek. Kolik různých trojic otázek je ve hře?

praktická část	teoretická část
10 možností	$\binom{20}{2} = 190$ **možností**

Pravidlo součinu: $10 \cdot 190 = 1\,900$
Celkem je ve hře 1 900 možností.

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost náhodného jevu A je číslo P(A), pro něž platí:

$$P(A)=\frac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Pravděpodobnost vyjadřujeme jako číslo z intervalu $\langle 0;1\rangle$ nebo v procentech od 0% do 100%.

Pravděpodobnost jistého jevu je 1.
Pravděpodobnost nemožného jevu je 0.

Příklady

1) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne číslo větší než 4?
počet všech možných výsledků: 6 (padne jakékoliv číslo od 1 do 6)
počet příznivých výsledků: 2 (padne číslo 5 nebo 6)

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2) Z 25 žáků jedné třídy domácí úkol 3 žáci nevypracovali, 6 žáků jej vypracovalo chybně a zbývající žáci jej vypracovali správně. Učitel náhodně vybere dvojici žáků. Jaká je pravděpodobnost, že oba vybraní žáci budou mít úkol vypracován správně?

počet všech možných výsledků: $\binom{25}{2}=300$ (vybereme jakoukoliv dvojici z 25 žáků)

počet příznivých výsledků: $\binom{16}{2}=120$ (vybereme dvojici z 16 žáků, kteří mají úkol správně)

$$P(A)=\frac{120}{600}=\frac{1}{5}$$

Pravděpodobnost sjednocení dvou náhodných jevů

V případě, že se dva jevy navzájem vylučují, určíme pravděpodobnost jejich sjednocení (tj. nastane jev A **nebo** jev B) jako **součet** pravděpodobností jednotlivých jevů.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Příklad

1) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo nebo číslo dělitelné čtyřmi?

Jev A: liché číslo (1, 3, 5) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Jev B: číslo dělitelné 4 (4) $P(B)=\frac{1}{6}$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů

Dva jevy jsou nezávislé v případě, kdy skutečnost, že nastane jeden jev nemá žádný vliv na to, zda nastane či nenastane jev druhý.
Pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů (tj. nastane jev A **a zároveň** jev B), je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Příklad

1) Hráč hodí jedenkrát běžnou šestistěnnou kostkou a jedenkrát mincí (na jedné straně mince je panna, na druhé je orel). Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne šestka a na minci orel?

Jev A: padne šestka $P(A)=\frac{1}{6}$

Jev B: padne orel $P(B)=\frac{1}{2}$

Jev $A\cap B$: padne šestka a zároveň orel: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$