Základní goniometrické rovnice

Základní goniometrické rovnice jsou například:
$\sin x = 0{,}5$; $\cos x = -0{,}3$; $\mathrm{tg}\, x = 1{,}25$

Každá goniometrická rovnice má nekonečně mnoho řešení vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí.

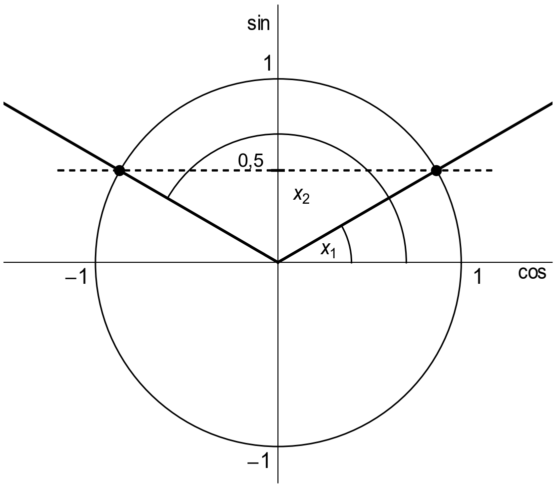
Základní kořeny goniometrické rovnice

Pro rovnice typu $\sin x = k$; $\cos x = k$ leží základní kořeny v intervalu $\langle 0°;360°)$,

Pro rovnice typu $\mathrm{tg}\, x = k$; $\mathrm{cotg}\, x = k$ leží základní kořen v intervalu $\langle 0°;180°)$.

1. rovnice sin x = “kladné číslo“

Např.: $\sin x = 0{,}5$



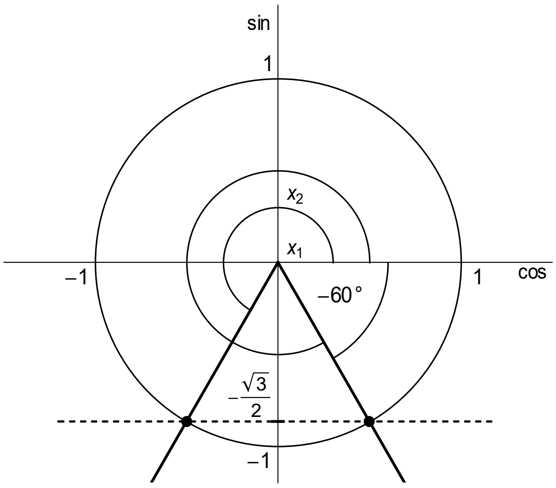
základní kořen x_1 určíme pomocí kalkulačky:
SHIFT sin 0,5:
$x_1 = 30°$
základní kořen x_2 určíme z jednotkové kružnice
$x_2 = 180° - x_1 = 150°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{30° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{150° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$

2. rovnice sin x = “záporné číslo“

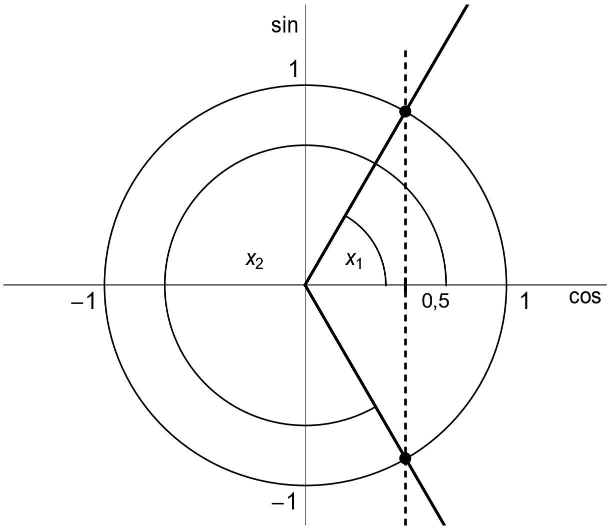
Např.: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Kalkulačka nám po SHIFT sin $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ukáže výsledek – 60°. Toto je jedno z řešení, ale ne základní kořen. Základní kořeny určíme z jednotkové kružnice:
$x_1 = 180° + 60° = 240°$
$x_2 = 360° - 60° = 300°$
Celé řešení ve stupních:
$P = \{240° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{300° + k \cdot 360°; k \in Z\}$
Celé řešení v radiánech:
$P = \left\{\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$

3. rovnice cos x = “kladné číslo“

Např.: $\cos x = 0,5$



Kalkulačka nám po SHIFT cos $0,5$ ukáže výsledek 60°, toto je (podle obrázku jednotkové kružnice) x_1

$x_1 = 60°$

Pomocí jednotkové kružnice:

$x_2 = 360° - 60° = 300°$

Celé řešení ve stupních:

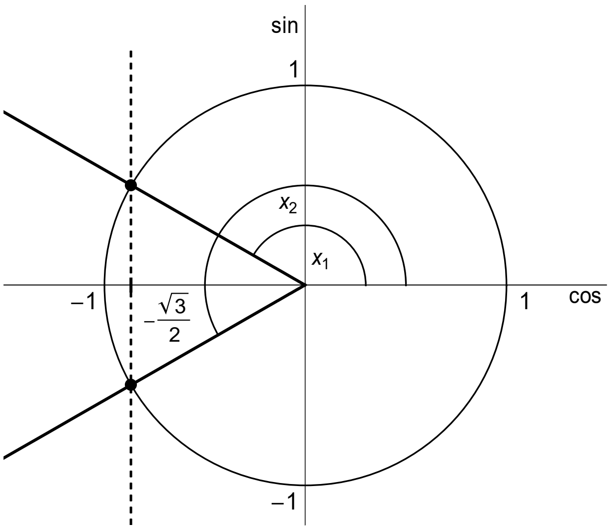
$P = \{60° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{300° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:

$$P = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$$

4. rovnice cos x = “záporné číslo“

Např.: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Kalkulačka nám po SHIFT cos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ukáže výsledek 150°, toto je (podle obrázku jednotkové kružnice) x_1

$x_1 = 150°$

Pomocí jednotkové kružnice:

$x_2 = 360° - 150° = 210°$

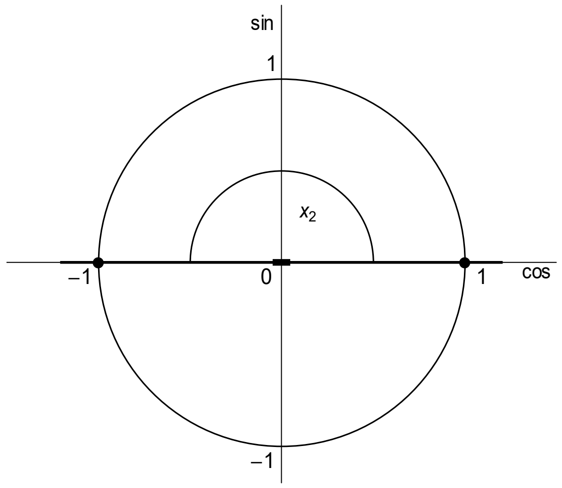
Celé řešení ve stupních:

$P = \{150° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{210° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:

$$P = \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$$

5. rovnice sin x = 0



$x_1 = 0°$

$x_2 = 180°$

Celé řešení ve stupních:

$P = \{0° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{180° + k \cdot 360°; k \in Z\}$ nebo

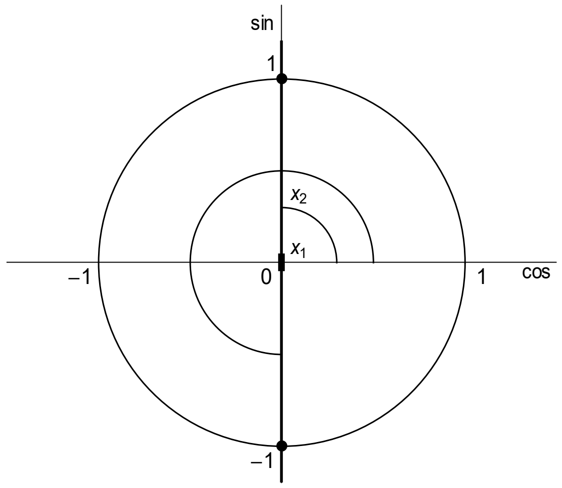
$P = \{k \cdot 180°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:

$P = \{0 + k \cdot 2\pi; k \in Z\} \cup \{\pi + k \cdot 2\pi; k \in Z\}$ nebo

$P = \{k \cdot \pi; k \in Z\}$

6. rovnice cos x = 0



$x_1 = 90°$

$x_2 = 270°$

Celé řešení ve stupních:

$P = \{90° + k \cdot 360°; k \in Z\} \cup \{270° + k \cdot 360°; k \in Z\}$ nebo

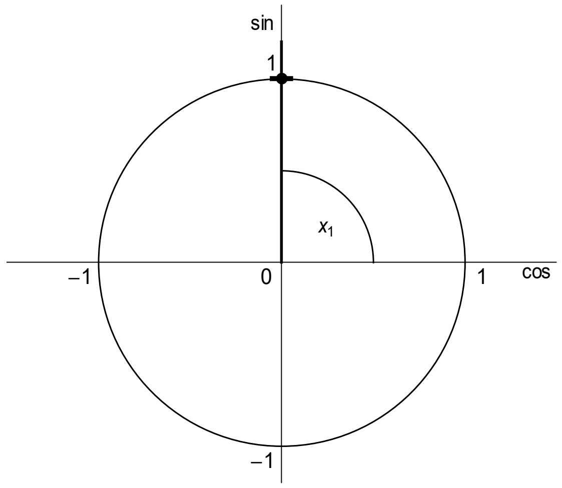
$P = \{90° + k \cdot 180°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:

$P = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$ nebo

$P = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in Z\right\}$

7. rovnice sin x = 1



$x_1 = 90°$

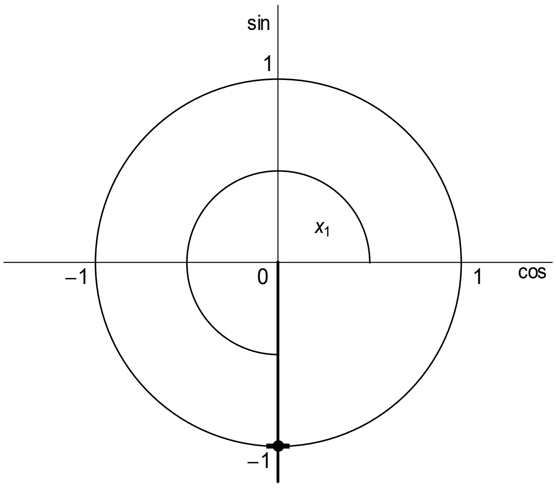
Celé řešení ve stupních:

$P = \{90° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:

$P = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$

8. rovnice sin x = – 1

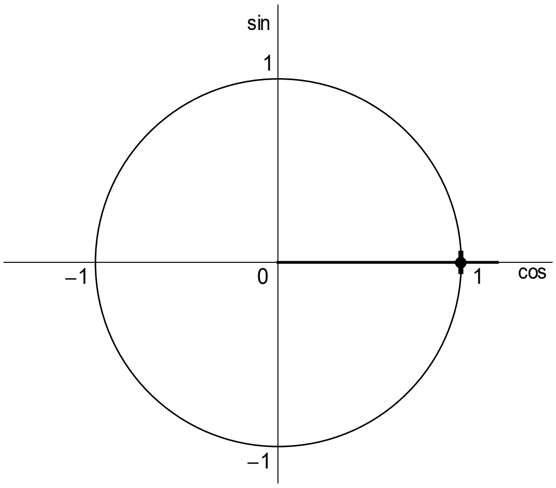


$x_1 = 270°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{270° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in Z\right\}$

9. rovnice cos x = 1

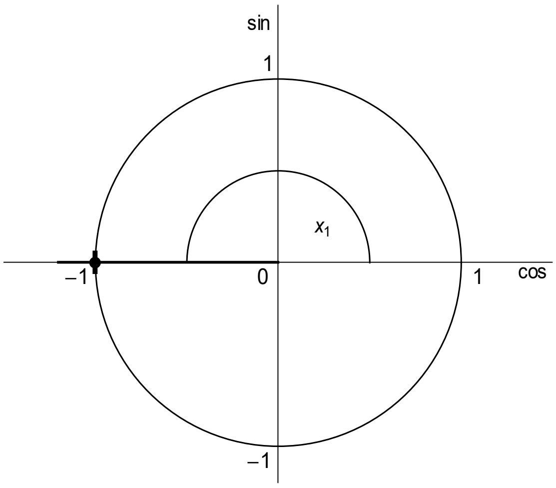


$x_1 = 0°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{0° + k \cdot 360°; k \in Z\}$ nebo $P = \{k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \{0 + k \cdot 2\pi; k \in Z\}$ nebo $P = \{k \cdot 2\pi; k \in Z\}$

10. rovnice cos x = – 1



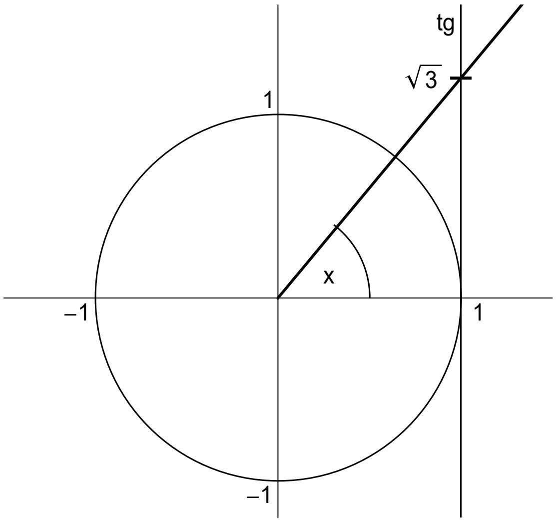
$x_1 = 180°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{180° + k \cdot 360°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \{\pi + k \cdot 2\pi; k \in Z\}$

11. rovnice tg x = „kladné číslo“

Např.: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



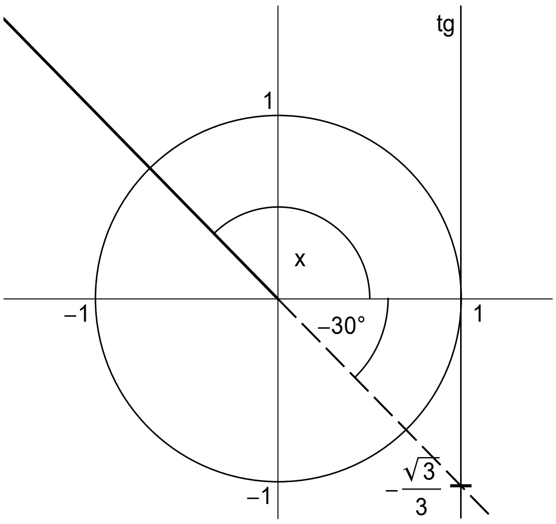
V intervalu $\langle 0°;180°)$ existuje jediný základní kořen:
$x = 60°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{60° + k \cdot 180°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi; k \in Z\right\}$

12. rovnice tg x = „záporné číslo“

Např.: $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



Kalkulačka po SHIFT tan $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ukáže hodnotu $-30°$, což je také řešení rovnice, ale my potřebujeme základní kořen z intervalu $\langle 0°;180°)$. Z jednotkové kružnice určíme základní kořen:
$x = 180° - 30° = 150°$

Celé řešení ve stupních:
$P = \{150° + k \cdot 180°; k \in Z\}$

Celé řešení v radiánech:
$P = \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi; k \in Z\right\}$