

Rovnice a nerovnice

Podzim 2025

6 Pro $x \in R, y \in R$ a $z \in R$ řešte soustavu:

$$5x + y - 2z = 8$$

$$-x - y - 2z = 8$$

$$x + z = 2$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Z třetí rovnice vypočítáme neznámou veličinu z a dosadíme do prvních dvou rovnic:

$$z = 2 - x$$

$$5x + y - 2 \cdot (2 - x) = 8$$

$$\underline{-x - y - 2 \cdot (2 - x) = 8}$$

$$5x + y - 4 + 2x = 8$$

$$\underline{-x - y - 4 + 2x = 8}$$

$$7x + y = 12$$

$$\underline{x - y = 12}$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

$$7x + y = 12$$

$$7 \cdot 3 + y = 12$$

$$y = -8$$

$$z = 2 - x$$

$$z = 2 - 3$$

$$z = -1$$

$$x = 3; y = -9; z = -1$$

Výsledek: $x = 3, y = -9, z = -1$, max. 2 body

8 Pro všechna přípustná $x \in R$ jsou dány výrazy U a V :

$$U = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+6}$$

$$V = \frac{2}{x+3} - \frac{5}{3x+9}$$

Určete všechna $x \in R$, pro která mají výrazy U a V stejnou hodnotu.

Řešení

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+6} = \frac{2}{x+3} - \frac{5}{3x+9}$$

$$\frac{1}{4(x+6)} = \frac{2}{x+3} - \frac{5}{3(x+3)} \quad / \cdot 12(x+6)(x+3)$$

$$3(x+3) = 24(x+6) - 20(x+6)$$

$$3x+9 = 24x+144 - 20x-120$$

$$-x = 15$$

$$x = -15$$

Výsledek: $x = -15$, 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Aritmetický průměr hmotností všech jablek na stole byl 214 g. Z těchto jablek jsme na stole nechali jen tři větší jablka a ostatní jablka jsme dali do prázdného košíku. Aritmetický průměr hmotností tří jablek ponechaných na stole je 240 g a aritmetický průměr hmotností všech jablek v košíku je 208 g.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtete, kolik jablek jsme dali do košíku.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x kolik jablek bylo v košíku

$x + 3$ celkový počet jablek

M hmotnost všech jablek

m_1 hmotnost tří větších jablek na stole

m_2 hmotnost jablek v košíku

Podle definice aritmetického průměru platí

$$\frac{M}{x+3} = 214 \Rightarrow M = 214 \cdot (x+3)$$

$$\frac{m_1}{3} = 240 \Rightarrow m_1 = 3 \cdot 240$$

$$\frac{m_2}{x} = 208 \Rightarrow m_2 = 208x$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$214 \cdot (x+3) = 3 \cdot 240 + 208x$$

$$214x + 642 = 720 + 208x$$

$$6x = 78$$

$$x = 13$$

Výsledek: Do košíku jsme dali 13 jablek., 2 body

17 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru $\mathbb{R}$ interval $(2;3)$?

A) $x^2 + 6x + 5 < 0$

B) $x^2 - 6x + 5 < 0$

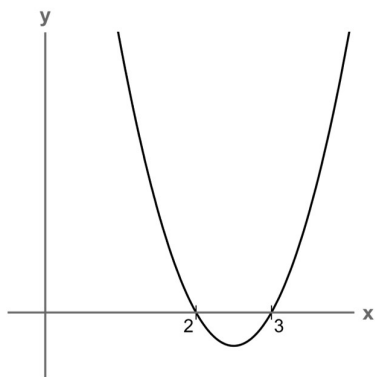
C) $x^2 + 5x + 6 < 0$

D) $x^2 - 5x + 6 < 0$

E) $x^2 - 5x - 6 < 0$

Řešení

Nerovnici, jejímž řešením je interval $(2;3)$ si graficky můžeme znázornit takto:



To znamená, že **rovnici** $ax^2 + bx + c = 0$ musí vyhovovat čísla 2 a 3. Jednoduchým dosazením zjistíme, že tato čísla vyhovují pouze rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$, proto D.

Výsledek: D, 2 body

Jaro 2025

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Pohyb matematického kyvadla popisuje rovnice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

kde T je perioda kyvu kyvadla, l je délka kyvadla a g je tíhové zrychlení.

2 Z uvedeně rovnice vyjádřete délku kyvadla l .

Řešení

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} \quad / : g$$

$$gT^2 = 4\pi^2 l \quad / : 4\pi^2$$

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Výsledek: $l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$, 1 bod

7 Pro $x \in R, y \in R$ a $z \in R$ řešte soustavu:

$$x + 2y + z = 15$$

$$x - 2y + z = 3$$

$$2x + 3z = 9$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Sečteme první dvě rovnice

$$x + 2y + z = 15$$

$$x - 2y + z = 3$$

$$\underline{2x + 2z = 18}$$

Přidáme třetí rovnici

$$2x + 3z = 9$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$2x + 2z = 18 \quad / \cdot (-1)$$

$$\underline{2x + 3z = 9}$$

$$-2x - 2z = -18$$

$$\underline{2x + 3z = 9}$$

$$z = -9$$

Z třetí rovnice vypočítáme x

$$2x + 3 \cdot (-9) = 9; \quad x = 18$$

Z první rovnice vypočítáme y

$$18 + 2y + (-9) = 15; \quad y = 3$$

Výsledek: $x = 18, y = 3, z = -9$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Průměrný plat všech zaměstnanců v oddělení je 46 200 korun.

Seniorní zaměstnanci tvoří třetinu všech zaměstnanců v oddělení a jejich průměrný plat je o 6 000 korun vyšší než průměrný plat zbývajících zaměstnanců v oddělení.

8 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtete průměrný plat seniorních zaměstnanců.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x počet všech lidí

y průměrný plat neseníorních zaměstnanců

Pro aritmetický průměr platí:

$$\frac{\text{součet platů všech zaměstnanců}}{\text{počet všech zaměstnanců}} = \text{průměrný plat všech zaměstnanců}$$

součet platů všech zam. = počet sen. zam. · jejich prům. plat + počet nesen. zam. · jejich prům. plat

$$\frac{\frac{x}{3} \cdot (y + 6000) + \frac{2}{3}x \cdot y}{x} = 46200 \quad / \cdot x$$

$$\frac{xy}{3} + 2000x + \frac{2xy}{3} = 46200x$$

$$xy + 2000x = 46200x \quad / : x$$

$$y + 2000 = 46200$$

$$y = 44200$$

$$44200 + 6000 = 50200$$

Výsledek: Průměrný plat seniorních zaměstnanců je 50 200 korun., max. 2 body

25 Přiřad'te ke každému intervalu (25.1–25.2) rovnici (A–F), jejíž všechna řešení v oboru $\mathbb{R}$ patří do tohoto intervalu.

25.1 $(-8; -2)$

25.2 $(2; 8)$

A) $x^2 - 6x + 10 = 0$ B) $\frac{(x+3)(x-1)}{(1-x)(x+5)} = 0$ C) $x^2 = 4x$ D) $x^2 = 16$ E) $x^2 + 15 = 8x$ F) $(x-4)^2 = 9$

Řešení

A)

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -40$$

Diskriminant je záporný, rovnice nemá řešení.

B)

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(1-x)(x+5)} = 0 \quad / \cdot (1-x)(x+5)$$

Podmínky

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$1-x \neq 0$$

$$x+5 \neq 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = 1 \text{ nesplňuje podmínku}$$

$$x \neq 1$$

$$x \neq -5$$

Řešením je pouze $x = -3$

C)

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4$$

D)

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = \sqrt{16}$$

$$x_2 = -\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4; x_2 = -4$$

E)

$$x^2 + 15 = 8x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 5; x_2 = 3$$

F)

$$(x-4)^2 = 9$$

$$(x-4) \text{ musí být } 3 \text{ nebo } -3$$

$$x_1 = 7; x_2 = 1$$

Výsledek: 25.1 B, 25.2 E, max. 4 body

Podzim 2024

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Lukáš si na internetové televizi zaplatil sledování všech dílů oblíbeného seriálu. První týden viděl 40 % všech dílů seriálu, druhý týden $\frac{3}{8}$ všech dílů seriálu a třetí týden mu zbývalo zhlédnout ještě posledních 9 dílů do konce seriálu.

2 Kolik dílů celkem měl seriál, který Lukáš sledoval?

Řešení

x počet dílů seriálu

1. týden $0,4x$

2. týden $\frac{3}{8}x$

3. týden 9

$$0,4x + \frac{3}{8}x + 9 = x \quad / \cdot 8$$

$$3,2x + 3x + 72 = 8x$$

$$72 = 1,8x$$

$$x = 40$$

Výsledek: Seriál měl celkem 40 dílů., 2 body

4 V oboru R řešte soustavu nerovnic:

$$\frac{1+3x}{4} > \frac{1-2x}{3}$$

$$-6x \leq 1 - 7x$$

Výsledek запиšte pomocí intervalu.

Řešení

$$\frac{1+3x}{4} > \frac{1-2x}{3} \quad / \cdot 12$$

$$-6x \leq 1 - 7x$$

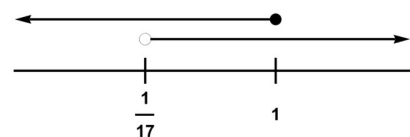
$$3(1+3x) > 4(1-2x)$$

$$x \leq 1$$

$$3 + 9x > 4 - 8x$$

$$17x > 1$$

$$x > \frac{1}{17}$$



$$x \in \left(\frac{1}{17}; 1 \right]$$

Výsledek: $K = \left(\frac{1}{17}; 1 \right]$, 2 body

5 V oboru R řešte rovnici:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - 1$$

Do záznamového archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - 1$$

Podmínky

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} - 1 \quad / \cdot x(x-1)$$

$$x \neq 0 \quad x-1 \neq 0$$

$$x-1 = x-1-x(x-1)$$

$$x \neq 1$$

$$x-1 = x-1-x^2+x$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$x_1=0; x_2=1$$

Obě čísla nesplňují podmínky, proto je výsledkem prázdná množina.

Výsledek: $K = \emptyset$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Bazén má tvar kvádr. Po vypuštění bazénu dosahuje voda na celém jeho dně do výšky 4 mm. Celkový objem této vody je 20 hl. Šířka bazénu je o 5 m menší než jeho délka.

13 Vypočítejte šířku a délku bazénu.

Výsledek uveďte v metrech.

Do záznamového archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$x \quad \text{délka bazénu}$$

$$x-5 \quad \text{šířka bazénu}$$

$$c = 4 \text{ mm} = 0,004 \text{ m}$$

výška vody

$$V = 20 \text{ hl} = 2000 \text{ l} = 2000 \text{ dm}^3 = 2 \text{ m}^3$$

objem vody

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$2 = x \cdot (x-5) \cdot 0,004$$

$$2 = 0,004x^2 - 0,02x$$

$$0,004x^2 - 0,02x - 2 = 0 \quad / \cdot 1000$$

$$4x^2 - 20x - 2000 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2000) = 32400$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{32400}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = 25$$

x_2 je záporné

Výsledek: Bazén má délku 25 m a šířku 20 m., max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Dva traktory, které orají různě rychle, zorají pole společně za 4 hodiny. Kdyby nejdříve zoral jeden z traktorů právě polovinu pole a potom druhý traktor zoral zbývající polovinu pole, celková doba orby by byla 9 hodin.

14 Vypočítejte, za kolik hodin by zoral celé pole první traktor a za kolik hodin druhý traktor.

Každý z traktorů orá stabilní rychlostí bez poruch a rychlostních výkyvů.

Do záznamového archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

traktor	za jak dlouho udělá celou práci v h	část práce za 1 h	jak dlouho pracoval	jakou část celkové práce udělal
1	x	$\frac{1}{x}$	4	$\frac{4}{x}$
2	y	$\frac{1}{y}$	4	$\frac{4}{y}$

1. rovnice: $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1$

2. rovnice: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 9$, protože každý traktor zorá polovinu pole za poloviční čas než celé pole

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 9 \quad / \cdot 2$$

$$x + y = 18$$

$$y = 18 - x$$

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{18-x} = 1 \quad / \cdot x \cdot (18-x)$$

$$4 \cdot (18-x) + 4x = x \cdot (18-x)$$

$$72 - 4x + 4x = 18x - x^2$$

$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$x_1 = 12$$

$$x_2 = 6$$

Výsledek: První traktor by pole sám zoral za 12 hodin a 2. traktor by sám pole zoral za 6 hodin nebo opačně., max. 2 body

Jaro 2024

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Pro číselnou hodnotu t_C teploty ve stupních Celsia a číselnou hodnotu t_F téže teploty ve stupních Fahrenheita platí vztah:

$$t_F = 1,8t_C + 32$$

3 Vypočtete, pro jakou teplotu ukáže teploměr ve stupních Celsia stejnou číselnou hodnotu jako teploměr ve stupních Fahrenheita.

Řešení

$$x = 1,8x + 32$$

$$x - 1,8x = 32$$

$$-0,8x = 32 \quad / : -0,8$$

$$x = -40$$

Výsledek: $t_C = -40^\circ\text{C}$, 1 bod

4 Určete všechna $x \in R$, pro která platí:

$$\frac{3x}{x+1} - 3 < 0$$

Výsledek запиште pomocí intervalu.

Řešení

$$\frac{3x}{x+1} - 3 < 0$$

$$\frac{3x - 3(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{3x - 3x - 3}{x+1} < 0$$

$$\frac{-3}{x+1} < 0$$

Zlomek má být kladný, čitatel je záporný, jmenovatel proto musí být kladný.

$$x+1 > 0$$

$$x > -1$$

$$x \in (-1; \infty)$$

Výsledek: $K = (-1; +\infty)$, 2 body

5 V oboru R řešte:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x-3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x-3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$$

Podmínky

$$\frac{x-3}{5x} + \frac{x}{2(x-1)} = \frac{3}{4} \quad / \cdot 20x(x-1)$$

$$x \neq 0 \quad x-1 \neq 0$$

$$4(x-1)(x-3) + 10x^2 = 15x(x-1)$$

$$x \neq 1$$

$$4(x^2 - 3x - x + 3) + 10x^2 = 15x^2 - 15x$$

$$4x^2 - 12x - 4x + 12 + 10x^2 = 15x^2 - 15x$$

$$-x^2 - x + 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = -4; x_2 = 3$$

Výsledek: $K = \{-4; 3\}$, max. 2 body

12 Lesní školka určená k pěstování sazenic lesních dřevin má tvar obdélníku. Rozdíl mezi délkami dvou sousedních stran obdélníku je 30 metrů. Na její oplocení se spotřebovalo 532 délkových metrů pletiva.

Jaká je výměra (plocha) lesní školky v m^2 ?

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

x délka obdélníku a

$x-30$ šířka obdélníku b

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$532 = 2 \cdot (x + x - 30)$$

$$532 = 2x + 2x - 60$$

$$x = 148$$

$$a = 148$$

$$b = 118$$

$$S = a \cdot b = 148 \cdot 118 = 17464 m^2$$

Výsledek: $S = 17\,464 m^2$, max. 2 body

16 Žáci v rámci expedice ušli během tří dnů 50 kilometrů. První den ušli dvakrát více než třetí den, druhý den ušli o 10 kilometrů méně než první den.

Kolik kilometrů ušli žáci celkem za první dva dny?

A) 24 B) 26 C) 36 D) 38 E) nelze ze zadání určit

Řešení

1. den $2x$

2. den $2x - 10$

3. den x

$$2x + 2x - 10 + x = 50$$

$$x = 12$$

$$2 \cdot 12 + 2 \cdot 12 - 10 = 38$$

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2023

2 Pro $a, b, c \in R$ je dán vztah:

$$2a + ab^2 + 3c = 0$$

Vyjádřete z tohoto vztahu neznámou a .

Řešení

$$2a + ab^2 + 3c = 0$$

$$2a + ab^2 = -3c$$

$$a(2 + b^2) = -3c$$

$$a = \frac{-3c}{2 + b^2}$$

Výsledek: $a = \frac{-3c}{b^2 + 2}$, 1 bod

4 V oboru R řešte:

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1$$

Podmínky

$$\frac{x-2}{x(x+2)} + \frac{2x}{x+2} = 1 \quad / \cdot x(x+2) \quad x \neq 0 \quad x \neq -2$$

$$x-2+2x^2 = x^2+2x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

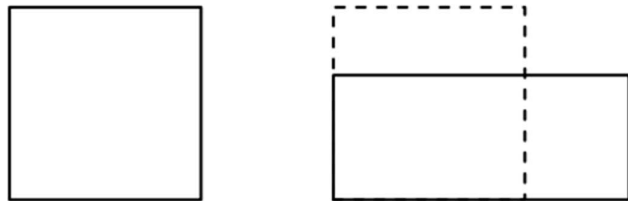
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -1 \quad \text{obě čísla vyhovují}$$

Výsledek: $K = \{-1; 2\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Čtvercový pozemek má stejnou výměru (obsah) jako obdélníkový pozemek. Obdélníkový pozemek má jednu stranu o 35 % kratší než čtvercový pozemek a druhou stranu o 140 metrů delší než čtvercový pozemek.



14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte v metrech obvod čtvercového pozemku.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x strana čtvercového pozemku

$0,65x$ šířka obdélníkového pozemku

$x + 140$ délka obdélníkového pozemku

$a^2 = a \cdot b$ obsah čtverce = obsah obdélníku

$$x^2 = 0,65x \cdot (x + 140)$$

$$x^2 = 0,65x^2 + 91x$$

$$0,35x^2 - 91x = 0$$

$$x \cdot (0,35x - 91) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$0,35x - 91 = 0$$

$$x_2 = 260$$

$$o = 4a$$

$$o = 1040 \text{ m}$$

Výsledek: Obvod čtvercového pozemku je 1 040 metrů. Max. 3 body

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N)

15.1 Nerovnice

$$(x-3)(3-x) \geq 0$$

má v oboru $\mathbf{R}$ více než jedno řešení.

15.2 Řešením nerovnice

$$(x+4)(x+4) \geq 0$$

v oboru $\mathbf{R}$ je každé reálné číslo.

15.3 Množinou všech řešení nerovnice

$$\frac{x-2}{2-x} > 0$$

v oboru $\mathbf{R}$ je prázdná množina.

Řešení

15.1

$$(x-3)(3-x) \geq 0$$

$$-(3-x)(3-x) \geq 0$$

$$-(3-x)^2 \geq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$(3-x)^2 \leq 0$$

Druhá mocnina je vždy kladná nebo nula, řešením nerovnice je pouze číslo 3.

Toto tvrzení je nepravda.

15.2

$$(x+4)(x+4) \geq 0$$

$$(x+4)^2 \geq 0$$

Druhá mocnina je vždy kladná nebo nula.

Toto tvrzení je pravdivé.

15.3

$$\frac{x-2}{2-x} > 0$$

$$\frac{-(2-x)}{2-x} > 0$$

$$-1 > 0$$

Výsledek: N A A, max. 3 body

Jaro 2023

4 V oboru R řešte:

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

Podmínky

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x(x-1)} = \frac{5}{x} \quad / \cdot x(x-1) \quad x \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$x(x+5) + 5x-1 = 5(x-1)$$

$$x^2 + 5x + 5x - 1 = 5x - 5$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -4 \quad \text{obě čísla vyhovují}$$

Výsledek: $K = \{-4; -1\}$, max. 2 body

5 Pro $x \in R, y \in R$ řešte soustavu rovnic:

$$x + 2y = 5$$

$$\frac{x}{2} = 10 - 4y$$

Řešení

$$x + 2y = 5$$

$$\frac{x}{2} = 10 - 4y \quad / \cdot 2$$

$$x + 2y = 5$$

$$x = 20 - 8y$$

$$x + 2y = 5 \quad / \cdot (-1)$$

$$x + 8y = 20$$

$$-x - 2y = -5$$

$$x + 8y = 20$$

$$6y = 15$$

$$y = \frac{5}{2}$$

$$x + 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$$

$$x + 5 = 5$$

$$x = 0$$

$$\text{Řešení: } x = 0; y = \frac{5}{2}$$

Výsledek: $K = \left\{ \left[0; \frac{5}{2} \right] \right\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Pro třídenní propagační akci byly vydány poukazy na jeden volný vstup do aquacentra. První den akce byly využity dvě pětiny všech vydaných poukazů. Každý další den akce bylo využito o 15 poukazů méně než v předchozím dni. Během celé třídenní akce nebyla využita pouze jedna dvacetina všech vydaných poukazů.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik vydaných poukazů bylo využito druhý den propagační akce.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x počet vydaných poukazů

1. den $\frac{2}{5}x$

2. den $\frac{2}{5}x - 15$

3. den $\frac{2}{5}x - 30$

Nebyla využita jedna dvacetina poukazů, tj. bylo využito $\frac{19}{20}$ poukazů

$$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x - 15 + \frac{2}{5}x - 30 = \frac{19}{20}x \quad / \cdot 20$$

$$8x + 8x - 300 + 8x - 600 = 19x$$

$$x = 180$$

$$\text{2. den: } \frac{2}{5} \cdot 180 - 15 = 57$$

Výsledek: Druhý den propagační akce bylo využito 57 vydaných poukazů. Max. 3 body

21 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru $\mathbf{R}$ interval $(7; +\infty)$?

A) $7 - x > 0$ B) $(x - 7)^2 > 0$ C) $x^2 - 49 > 0$ D) $\frac{(x-1)^2}{x-7} > 0$ E) $\frac{x-7}{x-1} > 0$

Řešení

A)

$$7 - x > 0$$

$$-x > -7 \quad / \cdot (-1)$$

$$x < 7$$

$$x \in (-\infty; 7)$$

B)

$(x - 7)^2 > 0$ druhá mocnina je vždy kladná nebo nula, nerovnici vyhovují všechna čísla kromě 7

C)

$$x^2 - 49 > 0$$

$$x^2 > 49$$

$$x \in (-\infty; -7) \cup (7; \infty)$$

D)

$$\frac{(x-1)^2}{x-7} > 0$$

Čitatel je kladný (druhá mocnina), jmenovatel musí být také kladný:

$$x - 7 > 0$$

$$x > 7$$

$$x \in (7; \infty)$$

Toto je správná možnost.

E)

$$\frac{x-7}{x-1} > 0$$

Zde je nejjednodušší řešit dosazením. Jestliže dosadíme $x = 0$, tak dostaneme $7 > 0$, což platí, takže 0 patří do intervalu, který je řešením této nerovnice. To ale odporuje tomu, že řešením má být interval $(7; +\infty)$.

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2022

6 Je dán výraz:

$$\frac{1-x}{x-7} + 1$$

Určete všechny $x \in R$, pro která je hodnota daného výrazu záporná.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{1-x}{x-7} + 1 < 0$$

$$\frac{1-x+x-7}{x-7} < 0$$

$$\frac{-6}{x-7} < 0$$

Zlomek má být záporný, čitatel je záporný, jmenovatel proto musí být kladný.

$$x-7 > 0$$

$$x > 7$$

$$x \in (7; \infty)$$

Výsledek: $x \in (7; +\infty)$, max. 2 body

7 V oboru R řešte:

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{x^2-1}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{x^2-1}$$

Podmínky

$$\frac{x+8}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{32}{(x+1)(x-1)} \quad / \cdot (x+1)(x-1) \quad x \neq 1 \quad x \neq -1$$

$$(x+8)(x+1) + x(x-1) = 32$$

$$x^2 + x + 8x + 8 + x^2 - x = 32$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24) = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 16}{4}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -6 \quad \text{obě čísla vyhovují}$$

Výsledek: $K = \{-6; 2\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Odměna 25 200 korun se rozdělila rovným dílem mezi všechny brigádníky. Kdyby bylo o 5 brigádníků více, na každého by vyšla odměna o 1000 korun menší.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik korun dostal každý brigádník.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x počet brigádníků

$$\frac{25200}{x} = \frac{25200}{x+5} + 1000 \quad / \cdot x \cdot (x+5)$$

$$25200 \cdot (x+5) = 25200x + 1000x \cdot (x+5)$$

$$25200x + 126000 = 25200x + 1000x^2 + 5000x$$

$$1000x^2 + 5000x - 126000 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5000^2 - 4 \cdot 1000 \cdot (-126000) = 529000000$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5000 \pm \sqrt{529000000}}{2 \cdot 1000}$$

$$x = 9$$

$$\frac{25200}{9} = 2800$$

Výsledek: Každý brigádník dostal 2 800 korun. Max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

U každé z následujících tří rovnic určíme počet všech jejích řešení v oboru $\mathbb{R}$.

I. $2^{2x} + 2 = 0$

II. $\frac{(2x+2)(x+2)}{(x+1)^2} = 0$

III. $\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

16 Právě jedno řešení

A) má pouze I. rovnice. B) má pouze II. rovnice. C) má pouze III. rovnice.
D) mají alespoň dvě z uvedených rovnic. E) nemá žádná z uvedených rovnic

Řešení

I. $2^{2x} + 2 = 0$

$$2^{2x} = -2$$

Výraz 2^{2x} je vždy kladný, tato rovnice nemá řešení.

II. $\frac{(2x+2)(x+2)}{(x+1)^2} = 0$

$$\frac{(2x+2)(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \quad / \cdot (x+1)^2 \quad \text{Podmínka}$$

$$(2x+2)(x+2) = 0 \quad x+1 \neq 0$$

$$2x+2 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad x \neq -1$$

$$x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Tato rovnice má jen jedno řešení $x = -2$, řešení $x = -1$ nevyhovuje podmínce.

III. $\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \quad / \cdot x \quad \text{Podmínka}$$

$$1 = x+1 \quad x \neq 0$$

$$x = 0$$

Tato rovnice nemá řešení

Výsledek: B, 2 body

Jaro 2022

7 V oboru R řešte:

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2+2x} = \frac{x}{x+2}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2+2x} = \frac{x}{x+2}$$

Podmínky

$$\frac{3(x-2)}{x(x+2)} + \frac{16}{x(x+2)} = \frac{x}{x+2} \quad / \cdot x(x+2) \quad x \neq 0 \quad x+2 \neq 0$$

$$3x - 6 + 16 = x^2 \quad x \neq -2$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = -2 \text{ (nevyhovuje podmínice); } x_2 = 5$$

Výsledek: $K = \{5\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Jedna korunová mince váží 3,6 gramu a jedna pětikorunová mince váží 4,8 gramu. V kasičce jsou pouze korunové a pětikorunové mince. Dohromady mají hodnotu 81 korun a váží 120 gramů.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte celkový počet mincí v kasičce.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x počet korunových mincí

y počet pětikorunových mincí

$$x + 5y = 81 \quad \Rightarrow x = 81 - 5y$$

$$3,6x + 4,8y = 120$$

$$3,6 \cdot (81 - 5y) + 4,8y = 120$$

$$291,6 - 18y + 4,8y = 120$$

$$y = 13$$

$$x = 81 - 5 \cdot 13 = 16$$

Výsledek: V kasičce bylo celkem 29 mincí. Max. 3 body

17 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru R prázdná množina?

A) $\frac{15 \cdot x}{15^2 \cdot x^2} < 0$

B) $\frac{x - 15^2}{15^2 - x} < 0$

C) $(x + 15)^2 \leq 0$

D) $x^2 + (-15)^2 \leq 0$

E) $x - 15^2 < x + 15^2$

Řešení

A)

$$\frac{15 \cdot x}{15^2 \cdot x^2} < 0 \quad / \cdot 15^2 x^2 \quad \text{Podmínka}$$

$$15x < 0 \quad x \neq 0$$

$$x < 0$$

B)

$$\frac{x - 15^2}{15^2 - x} < 0 \quad \text{Podmínka}$$

$$\frac{-(15^2 - x)}{15^2 - x} < 0 \quad 15^2 - x \neq 0$$

$$-1 < 0 \quad x \neq 225$$

Řešením této nerovnice jsou všechna reálná čísla kromě 225.

C)

$$(x + 15)^2 \leq 0$$

Této nerovnici vyhovuje pouze číslo -15

$$(-15 + 15)^2 \leq 0$$

$$0 \leq 0 \text{ platí}$$

D)

$$x^2 + (-15)^2 \leq 0$$

$$x^2 + 225 \leq 0$$

$x^2 \leq -225$ druhá mocnina nemůže být záporná, řešením je prázdná množina

E)

$$x - 15^2 < x + 15^2$$

$$-225 < 225$$

Řešením této nerovnice jsou všechny reálná čísla.

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2021

6 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1} \quad / \cdot (x-5)(x-1) \quad \text{Podmínky}$$

$$x-1 + (x-5)(x-1) = (2x-9)(x-1) + x-5 \quad x \neq 5 \quad x \neq 1$$

$$x-1 + x^2 - x - 5x + 5 = 2x^2 - 2x - 9x + 9 + x - 5$$

$$-x^2 + 5x = 0$$

$$x(-x+5) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 5 \text{ nevyhovuje podmínice}$$

Výsledek: $K = \{0\}$, max. 2 body

7 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$y^2 + 40y + 400 > 0$$

Řešení

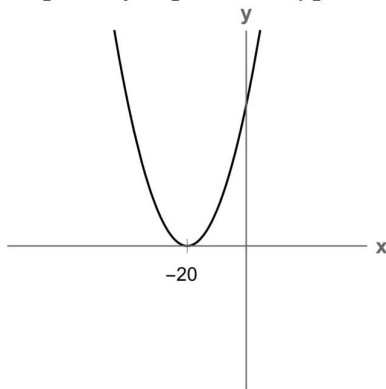
Výraz na levé straně nerovnice je kvadratický trojčlen, můžeme si jej graficky znázornit pomocí kvadratické funkce. Nejprve určíme nulové body.

$$y^2 + 40y + 400 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-40 \pm 0}{2} = -20$$

Odpovídající parabola vypadá takto:



Řešením kvadratické nerovnice $y^2 + 40y + 400 > 0$ jsou všechna reálná čísla kromě -20 , tj.

$$x \in (-\infty; -20) \cup (-20; \infty).$$

(Pokud by nerovnice měla tvar $y^2 + 40y + 400 \geq 0$, tak by jejím řešením byla všechna reálná čísla.)

Výsledek: $K = (-\infty; -20) \cup (-20; \infty)$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V učitelském sboru má každý učitel čtyřikrát více kolegyň než kolegů, zatímco každá učitelka má kolegů o 40 méně než kolegyň.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtete, kolik učitelek je v učitelském sboru.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x počet učitelek v učitelském sboru

y počet učitelů

$x = 4 \cdot (y - 1)$	protože každý učitel má čtyřikrát více kolegyň než kolegů, sám sobě není kolegou
$x - 1 = y + 40$	protože každá učitelka má kolegů o 40 méně než kolegyň, sama sobě není kolegyní

$$x = 4 \cdot (y - 1)$$

$$x - 1 = y + 40$$

Metodou dosazovací:

$$4 \cdot (y - 1) - 1 = y + 40$$

$$y = 15$$

$$x = 56$$

Výsledek: V učitelském sboru je 56 učitelek, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Řešíme tři rovnice v oboru $\mathbb{R}$:

$$\text{I. } (1-x)^2 = (3-x)^2 \quad \text{II. } 1-x = 3-x \quad \text{III. } (3-x)(1-x) = 3-x$$

24 Které z uvedených rovnic mají právě jedno řešení?

- A) žádná z uvedených rovnic
- B) pouze I. rovnice
- C) pouze III. rovnice
- D) právě dvě z uvedených rovnic
- E) všechny tři uvedené rovnice

Řešení

$$\text{I. } (1-x)^2 = (3-x)^2$$

$$1 - 2x + x^2 = 9 - 6x + x^2$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Rovnice má jen jedno řešení.

$$\text{II. } 1 - x = 3 - x$$

$$1 - x = 3 - x$$

$$1 = 3$$

Řešením je prázdná množina

$$\text{III. } (3-x)(1-x) = 3-x$$

$$3 - 3x - x + x^2 = 3 - x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3$$

Rovnice má dvě řešení.

Výsledek: B, 2 body

Červenec 2021 – mimořádný termín

6 V oboru R řešte:

$$\frac{2x+1}{x+1} = 3 + \frac{2}{x-1}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{2x+1}{x+1} = 3 + \frac{2}{x-1} \quad / \cdot (x+1)(x-1)$$

Podmínky

$$(2x+1)(x-1) = 3(x+1)(x-1) + 2(x+1) \quad x \neq -1 \quad x \neq 1$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 3(x^2 - x + x - 1) + 2x + 2$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 3x^2 - 3x + 3x - 3 + 2x + 2$$

$$-x^2 - 3x = 0$$

$$x(-x-3) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -3$$

Výsledek: $K = \{-3; 0\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Ve skladu bylo na začátku dubna 800 párů vycházkových bot a 300 párů sportovních bot.

Při inventuře na konci dubna se zjistilo, že se v tomto měsíci prodalo čtyřikrát více párů vycházkových bot než sportovních, a ve skladu tak zbylo o 140 párů vycházkových bot více než sportovních.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte, kolik párů

15.1 vycházkových bot se v dubnu prodalo,

15.2 bot (vycházkových i sportovních dohromady) bylo ve skladu při inventuře na konci dubna.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x kolik párů vycházkových bot se prodalo

y kolik párů sportovních bot se prodalo

$x = 4y$	protože vycházkových bot se prodalo čtyřikrát více párů než sportovních bot
$800 - x = 300 - y + 140$	protože ve skladu zbylo o 140 párů vycházkových bot více než sportovních

$$x = 4y$$

$$800 - x = 300 - y + 140$$

Metodou dosazovací:

$$800 - 4y = 300 - y + 140$$

$$800 - 300 - 140 = 3y$$

$$y = 120$$

$$x = 480$$

Výsledek: 15.1 V dubnu se prodalo 480 párů vycházkových bot. 15.2 Při inventuře bylo ve skladu 500 párů bot. max. 3 body

25 Přiřaďte ke každé nerovnici (25.1–25.4) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru R.

$$25.1 \quad (x-3)(x+2) < 0 \qquad 25.2 \quad \frac{x+3}{2-x} < 0$$

$$25.3 \quad \frac{(x-3)^2}{x+2} < 0 \qquad 25.4 \quad \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} < 0$$

- A) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ B) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$ C) $(-\infty; -2)$
 D) $(-\infty; 2)$ E) $(-3; 2)$ F) $(-2; 3)$

Řešení

25.1

$$(x-3)(x+2) < 0$$

Jedná se o nerovnici v součinném tvaru, vyřešíme ji metodou nulových bodů:

$x-3$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
	-2	3	

Řešením je interval $(-2; 3)$, tj. F

25.2

$$\frac{x+3}{2-x} < 0$$

Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru, vyřešíme ji metodou nulových bodů:

$x+3$	-	+	+
$2-x$	+	+	-
	-3	2	

Řešením je interval $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$, tj. A

25.3

$$\frac{(x-3)^2}{x+2} < 0$$

V čitateli je druhá mocnina, proto je kladný (kromě 3), zlomek je záporný, proto jmenovatel musí být také záporný.

$$x+2 < 0$$

$$x < -2$$

Řešením je interval $(-\infty; -2)$, tj. C

25.4

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x+3} < 0$$

Pro $x \neq -3$ můžeme zkrátit:

$$x-2 < 0$$

$$x < 2$$

$$x \in (-\infty; 2)$$

Z tohoto intervalu ale musíme vynechat číslo -3 .

Řešením je interval $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$, tj. B

Výsledek: FACB, max. 4 body

Jaro 2021

6 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2} = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2} = 0 \quad / \cdot 2(x^2 - x - 6)$$

$$2(x^2 - 4) - 3(x^2 - x - 6) = 0$$

$$2x^2 - 8 - 3x^2 + 3x + 18 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 5$$

Pro $x_1 = -2$ je jmenovatel $x^2 - x - 6$ roven nule, číslo $x_2 = 5$ vyhovuje.

Výsledek: $K = \{5\}$, max. 2 body

9 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \leq 0$$

Řešení

$$\frac{x(x-5)}{x} \leq 0$$

Pro $x \neq 0$ můžeme zkrátit:

$$x - 5 \leq 0$$

$$x \leq 5$$

$$x \in (-\infty; 5]$$

Z tohoto intervalu ale musíme vynechat číslo 0.

Výsledek: $K = (-\infty; 0) \cup (0; 5]$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Emil, Pavel a Martin koupili společně dárek za 2 975 korun.

Pavel přispěl částkou o 20 % vyšší než Emil.

Emil přispěl částkou, která je o 20 % menší než aritmetický průměr příspěvků Pavla a Martina.

14 Vypočítejte, jakou částkou přispěl Martin.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x kolik přispěl Emil

$1,2x$ kolik přispěl Pavel

y kolik přispěl Martin

$$x + 1,2x + y = 2975$$

$$x = 0,8 \cdot \frac{1,2x + y}{2}$$

Tuto soustavu rovnic budeme řešit metodou dosazovací. Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice.

$$x = 0,4(1,2x + y)$$

$$x = 0,48x + 0,4y$$

$$0,52x = 0,4y$$

$$x = \frac{10}{13}y$$

$$\frac{10}{13}y + 1,2 \cdot \frac{10}{13}y + y = 2975$$

$$\frac{35}{13}y = 2975$$

$$y = 1105$$

Výsledek: Martin přispěl částkou 1105 korun, max. 3 body

Podzim 2020

5 V oboru R řešte:

$$\frac{x-6}{x-3} = 2 - \frac{x}{x+3}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{aligned}\frac{x-6}{x-3} &= 2 - \frac{x}{x+3} \quad / \cdot (x-3)(x+3) && \text{Podmínky} \\ (x+3)(x-6) &= 2(x+3)(x-3) - x(x-3) && x \neq 3 \quad x \neq -3 \\ x^2 - 6x + 3x - 18 &= 2(x^2 - 9) - x^2 + 3x \\ x^2 - 3x - 18 &= 2x^2 - 18 - x^2 + 3x \\ -6x &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}$$

Výsledek: $K = \{0\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Hodinová sazba trenéra badmintonu je o 250 korun vyšší než hodinový pronájem kurtu. Cena za dvě hodiny pronájmu kurtu je o jednu devítinu nižší, než je hodinová sazba trenéra badmintonu.

(Hodinová sazba trenéra badmintonu nezahrnuje pronájem kurtu.)

7 Vypočítejte v korunách hodinovou sazbu trenéra badmintonu.

Řešení

x hodinová sazba trenéra badmintonu

y hodinový pronájem kurtu

$x = y + 250$	hodinová sazba trenéra badmintonu je o 250 korun vyšší než hodinový pronájem kurtu
$2y = \frac{8}{9}x$	cena za dvě hodiny pronájmu kurtu je o jednu devítinu nižší, než je hodinová sazba trenéra badmintonu

$$x = y + 250$$

$$2y = \frac{8}{9}x \quad / \cdot 9$$

$$x - y = 250 \quad / \cdot 18$$

$$\underline{-8x + 18y = 0}$$

$$18x - 18y = 4500$$

$$\underline{-8x + 18y = 0}$$

$$10x = 4500$$

$$x = 450$$

Výsledek: Hodinová sazba trenéra je 450 Kč, max. 2 body.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pondělí byli ve třídě všichni žáci a poměr počtu dívek ku počtu chlapců byl 3 : 2.

V úterý chyběly ve třídě pouze 3 dívky a uvedený poměr se změnil na 5 : 4.

Ve středu chyběli 2 chlapci a 2 dívky.

Ve čtvrtek chyběli pouze 2 chlapci.

V pátek nikdo nechyběl.

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 V úterý bylo ve třídě přítomno 15 dívek.

16.2 Ve středu byl poměr počtu dívek ku počtu chlapců roven 3 : 2.

16.3 Ve čtvrtek bylo ve třídě přítomno 10 chlapců.

16.4 V pátek bylo ve třídě celkem 28 žáků.

Řešení

x počet dívek

y počet chlapců

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$	v pondělí byli ve třídě všichni žáci a poměr počtu dívek ku počtu chlapců byl 3 : 2
$\frac{x-3}{y} = \frac{5}{4}$	v úterý chyběly ve třídě pouze 3 dívky a uvedený poměr se změnil na 5 : 4

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \quad / \cdot 2y$$

$$\frac{x-3}{y} = \frac{5}{4} \quad / \cdot 4y$$

$$2x - 3y = 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$4x - 5y = 12$$

$$-4x + 6y = 0$$

$$4x - 5y = 12$$

$$y = 12$$

$$x = 18$$

$$16.1 \quad 18 - 3 = 15 \quad \text{ANO}$$

$$16.2 \quad \frac{18-2}{12-2} = \frac{16}{10} \neq \frac{3}{2} \quad \text{NE}$$

$$16.3 \quad 12 - 2 = 10 \quad \text{ANO}$$

$$16.4 \quad 18 + 12 = 30 \neq 28 \quad \text{NE}$$

Výsledek: ANAN, max 2 body.

18 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru $\mathbf{R}$ interval $(-1; 3)$?

A) $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ B) $(x+1)(3-x) < 0$ C) $(x+1)(x-3) < 0$ D) $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$ E) $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$

Řešení

A)

Jmenovatel je kladný, čitatel proto musí být záporný

$$x-3 < 0$$

$$x < 3$$

$$x \in (-\infty; 3)$$

B)

Jedná se o nerovnici v součinném tvaru, vyřešíme ji metodou nulových bodů:

$x+1$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
	-1	3	

$$x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$$

C)

Jedná se o nerovnici v součinném tvaru, vyřešíme ji metodou nulových bodů:

$x+1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
	-1	3	

$$x-3 < 0$$

$$x < 3$$

$$x \in (-1; 3) - \text{správná možnost}$$

D), E) neplatí, protože ≥ 0 , tak by interval musel být u 3 uzavřený.

Výsledek: C, 2 body.

Jaro 2020

6 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1 \quad \text{Podmínky}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x(x-2)} - 1 \quad / \cdot x(x-2) \quad x \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$2(x-2) = 5 - x(x-2)$$

$$2x - 4 = 5 - x^2 + 2x$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

Výsledek: $K = \{-3; 3\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Aleš a Blanka začali současně číst knihu, která má 240 stran. Aleš četl každý den stejný počet stran. Blanka četla denně o 4 strany více než Aleš, a to včetně pátku, kdy knihu dočetla. Aleš pak pokračoval oba víkendové dny, než knihu dočetl.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte, **kolik stran knihy četl denně Aleš.**

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x kolik stran knihy četl denně Aleš

$x + 4$ kolik stran knihy četla denně Blanka

Aleš přečetl knihu za $\frac{240}{x}$

Blanka přečetla knihu za $\frac{240}{x+4}$

Aleš četl o dva dny déle:

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+4} + 2 \quad / \cdot x(x+4)$$

$$240(x+4) = 240x + 2x(x+4)$$

$$240x + 960 = 240x + 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 960 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-960) = 7744$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{7744}}{2 \cdot 2} = 20$$

Výsledek: Aleš četl denně 20 stran knihy, max. 3 body

$$24 \quad \frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Uvedená rovnost výrazů platí

- A) pro všechna reálná čísla x a y .
- B) pro libovolné reálné číslo y a každé nenulové reálné číslo x .
- C) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné reálné číslo.
- D) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné nenulové reálné číslo.
- E) pro všechna reálná čísla x a y , kde $x \neq 0$ a současně $x \neq y$.

Řešení

$$\frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{y}{x(x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Musí platit $\frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$ a navíc $x \neq 0$ – správná možnost je D.

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2019

5 V oboru R řešte:

$$x \cdot \left(\frac{2x-6}{x-6} - 1 \right) = \frac{6-7x}{6-x}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$x \cdot \left(\frac{2x-6}{x-6} - 1 \right) = \frac{6-7x}{6-x} \quad \text{Podmínka}$$

$$\frac{2x^2-6x}{x-6} - x = \frac{6-7x}{-(x-6)} \quad / \cdot (x-6) \quad x \neq 6$$

$$2x^2 - 6x - x(x-6) = -(6-7x)$$

$$2x^2 - 6x - x^2 + 6x = -6 + 7x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 6 \text{ - nevyhovuje podmínce}$$

$$x_2 = 1$$

Výsledek: $K = \{1\}$ a postup řešení, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Každý ze tří muzikantů vydělal na společném koncertě stejnou částku. Kamil utratil dvě pětiny svého výdělku, Luboš utratil o 50 % více než Kamil a Martinovi z výdělku zbylo 240 korun. Všichni tři muzikanti tak utratili celkem 60 % společného výdělku z koncertu. Zbytek poslali jako dar na charitu.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik korun činil dar na charitu.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

každý ze 3 muzikantů vydělal x Kč
společně vydělali $3x$ Kč

	utratil
Kamil	$\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$
Luboš	$1,5 \cdot \frac{2x}{5} = \frac{3x}{5}$
Martin	$x - 240$

Utrátili celkem 60 % společného výdělku:

$$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{5} + x - 240 = 0,6 \cdot 3x \quad / \cdot 5$$

$$2x + 3x + 5x - 1200 = 9x$$

$$x = 1200$$

$$\text{celkem vydělali:} \quad 3 \cdot 1200 = 3600$$

$$\text{utratili:} \quad 0,6 \cdot 3600 = 2160$$

$$\text{na charitu dali:} \quad 3600 - 2160 = 1440$$

Výsledek: „Dar na charitu činil 1 440 korun.“ a postup řešení, max. 3 body

Jaro 2019

5 V oboru R řešte rovnici:

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x}$$

Podmínky

$$\frac{2x+8}{4x(x-2)} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x} \quad / \cdot 4x(x-2) \quad x \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$2x+8-2 \cdot 5 \cdot (x-2) = 4(x-2)$$

$$2x+8-10x+20 = 4x-8$$

$$-12x = -36 \quad / : (-12)$$

$$x = 3$$

Výsledek: $K = \{3\}$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Na zámek přišly pouze dvě třetiny všech účastníků zájezdu, ale na prohlídku zámku čtyři z těchto příchozích nešli. Prohlídky zámku se tak zúčastnila jen polovina všech účastníků zájezdu.

6 Určete počet všech účastníků zájezdu.

Řešení

počet účastníků zájezdu

x

prohlídku absolvovalo

dvě třetiny všech minus 4, což je polovina všech:

$$\frac{2}{3}x - 4 = 0,5x \quad / \cdot 3$$

$$2x - 12 = 1,5x$$

$$0,5x = 12$$

$$x = 24$$

Výsledek: 24 účastníků, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se tak za 15 dnů vyrobilo 2 200 výrobků.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic určete celkový počet výrobků vyrobených za prvních 5 dnů.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

x kolik se vyrobilo denně v následujících 10 dnech (tj. 6. – 15. den)

$$5 \cdot \frac{3}{4}x + 10 \cdot x = 2200 \quad / \cdot 4$$

$$15x + 40x = 8800$$

$$x = 160$$

$$\text{Prvních 5 dnů denně } \frac{3}{4} \cdot 160 = 120$$

$$\text{Celkem za prvních 5 dnů: } 5 \cdot 120 = 600$$

Výsledek: „Za prvních 5 dnů se vyrobí 600 výrobků.“ a postup řešení, max. 3 body.

23 Pro kterou z následujících nerovnic s neznámou $x \in R$ je množinou všech řešení interval $(-\infty; 0)$?

- A) $-2x < 0$ B) $\frac{x}{x-1} < 0$ C) $\frac{x}{-2} \geq 0$ D) $\frac{2x}{x} < 0$ E) $2x < x$

Řešení

A)

$$-2x < 0 \quad / : (-2)$$

$$x > 0$$

$$x \in (0; \infty)$$

B)

Lze řešit metodou nulových bodů – zatím přeskočíme

C)

$$\frac{x}{-2} \geq 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$x \leq 0$$

$$x \in (-\infty; 0]$$

D)

$$\frac{2x}{x} < 0 \quad \text{pro } x \neq 0 \text{ můžeme zkrátit}$$

$$2 < 0$$

$$x \in \emptyset$$

E)

$$2x < x$$

$$2x - x < 0$$

$$x < 0$$

$$x \in (-\infty; 0)$$

Výsledek: E, 2 body

Podzim 2018

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici:

$$\frac{x+10}{x} + \frac{100}{10x-x^2} = \frac{x+20}{x-10}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x+10}{x} + \frac{100}{10x-x^2} = \frac{x+20}{x-10}$$

Podmínky

$$\frac{x+10}{x} + \frac{100}{x(10-x)} = \frac{x+20}{-(10-x)} \quad / \cdot x(10-x) \quad x \neq 0 \quad x \neq 10$$

$$(x+10)(10-x) + 100 = -x(x+20)$$

$$10x - x^2 + 100 - 10x + 100 = -x^2 - 20x$$

$$20x = -200 \quad / : 20$$

$$x = -10$$

Výsledek: $K = \{-10\}$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Modelka Tereza měla příslibený výdělek o 5 000 korun vyšší než modelka Marie, ale nakonec si obě modelky vydělaly stejně. Přitom Tereza si vydělala o polovinu více, než měla příslibeno, a Marie dokonce dvojnásobek toho, co měla příslibeno.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik korun si vydělaly dohromady Tereza s Marií.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

	příslibený výdělek	skutečný výdělek	skutečný výdělek pro zkoušku
Tereza	$x + 5000$	$1,5(x + 5000)$	30 000
Marie	x	$2x$	30 000

Vydělaly si stejně:

$$1,5(x + 5000) = 2x$$

$$1,5x + 7500 = 2x$$

$$7500 = 0,5x$$

$$x = 15\,000$$

Výsledek: Tereza s Marií si dohromady vydělaly 60 000 Kč. Postup řešení, max. 3 body

26 Ke každé nerovnici (26.1 – 26.3) řešené v oboru $\mathbb{R}$ přiřaďte odpovídající množinu všech řešení (A – E).

26.1 $x^2 \leq 0$ 26.2 $-2x \leq 4 - 2 \cdot 2$ 26.3 $\frac{2x^2 - 4x}{(x-2) \cdot x} \leq 0$

A) $\emptyset$ B) $\{0\}$ C) $\langle 0; +\infty \rangle$ D) $(-\infty; 0\rangle$ E) jiná množina

Řešení

26.1

$$x^2 \leq 0$$

Druhá mocnina je vždy kladná nebo nula

$$x = \{0\}$$

26.2

$$-2x \leq 4 - 2 \cdot 2$$

$$-2x \leq 0 \quad / : (-2)$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \langle 0; \infty \rangle$$

26.3

$$\frac{2x^2 - 4x}{(x-2) \cdot x} \leq 0$$

$$\frac{2x(x-2)}{(x-2) \cdot x} \leq 0$$

Pro $x \neq 2, x \neq 0$ můžeme zkrátit

$$2 \leq 0$$

$$x \in \emptyset$$

Výsledek: B C A, max. 3 body

Jaro 2018

2 V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici a množinu všech řešení zapište intervalem.

$$\frac{14-2x}{-2} + 2 < 0$$

Řešení

$$\frac{14-2x}{-2} + 2 < 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$14 - 2x - 4 > 0$$

$$-2x > -10 \quad / : (-2)$$

$$x < 5$$

$$x \in (-\infty; 5)$$

Výsledek: $x \in (-\infty; 5)$ nebo $K = (-\infty; 5)$, 1 bod

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot x = 1 - \frac{x}{6}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot x = 1 - \frac{x}{6}$$

$$\frac{2x(x-2)}{12} = 1 - \frac{x}{6} \quad / \cdot 12$$

$$2x^2 - 4x = 12 - 2x$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -2$$

Výsledek: $x_1 = 3; x_2 = -2$ nebo $K = \{-2; 3\}$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Pan Kocour uvažuje o výhodné investici, ale jeho kapitál by pokryl jen třetinu investice. Proto nabídl spoluúčast panu Malému, jehož kapitál je o 200 miliónů korun vyšší než kapitál pana Kocoura. Aby společně pokryli celou investici, každý z nich uvolní přesně polovinu svého kapitálu.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete v korunách

15.1 hodnotu kapitálu pana Kocoura,

15.2 částku, kterou na investici uvolní pan Malý.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

	kapitál	kolik uvolnil
Kocour	x	$\frac{x}{2}$
Malý	$x + 200$	$\frac{x + 200}{2}$

hodnota investice $3x$ (protože kapitál pana Kocoura stačí jen na třetinu investice)

$$\frac{x}{2} + \frac{x + 200}{2} = 3x \quad / \cdot 2$$

$$x + x + 200 = 6x$$

$$x = 50$$

Výsledek: Nutným předpokladem nenulového hodnocení je správně sestavená soustava rovnic, resp. rovnice, která vede k výpočtu požadovaných údajů.

15.1 50 miliónů Kč, 15.2 125 miliónů Kč, odpovědi, max. 3 body

17 Která z následujících rovnic má v oboru $\mathbb{R}$ právě jedno řešení?

A) $x^2 + 1 = 0$ B) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ C) $x^2 - 1 = 0$ D) $x^2 = x$ E) žádná z výše uvedených rovnic

Řešení

A) $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ tato rovnice nemá řešení

B) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Tato rovnice má jedno řešení.

C) $x^2 - 1 = 0$

$$(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 1 ; x_2 = -1$$

D) $x^2 = x$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 ; x_2 = 1$$

Výsledek: B, 2 body

Podzim 2017

3 V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici: $2x - 1 > -2 + 2x$

Řešení

$$2x - 1 > -2 + 2x$$

$$-1 > -2$$

Tato rovnost platí pro všechna reálná čísla.

Výsledek: $x \in (-\infty; \infty)$ nebo $x \in \mathbb{R}$ nebo $K = \mathbb{R}$; **1 bod**

5 Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x + 2y = -1$$

$$z - 2y = -2$$

$$x - 2z = -3$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

Z libovolné rovnice vyjádříme libovolnou neznámou a dosadíme do zbývajících rovnic, dostaneme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$x - 2z = -3 \Rightarrow x = 2z - 3$$

$$2z - 3 + 2y = -1$$

$$z - 2y = -2$$

$$2z + 2y = 2$$

$$z - 2y = -2$$

$$3z = 0$$

$$z = 0$$

$$x = 2z - 3 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$z - 2y = -2$$

$$0 - 2y = -2$$

$$y = 1$$

Výsledek: $x = -3$; $y = 1$; $z = 0$ nebo $K = \{[-3; 1; 0]\}$ a postup řešení, max. 2 body

6 V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici: $2x - 3 = (2x - 3)(2x + 3)$

Řešení

$$2x - 3 = (2x - 3)(2x + 3)$$

$$2x - 3 = 4x^2 - 9$$

$$4x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -1$$

Výsledek: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -1$ nebo $K = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Do školní knihovny se zakoupilo 12 stejných učebnic němčiny a několik stejných učebnic španělštiny.

Za všechny zakoupené učebnice němčiny se zaplatilo stejně jako za všechny učebnice španělštiny.

Cena jedné učebnice španělštiny byla o 60 Kč vyšší než cena jedné učebnice němčiny.

Kdyby se zakoupilo 12 kusů učebnic němčiny a 12 kusů učebnic španělštiny, učebnice by stály celkem 3 600 Kč.

15

15.1 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik Kč stála jedna učebnice němčiny.

15.2 Vypočtete, kolik učebnic španělštiny se zakoupilo do školní knihovny.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení

	cena	počet kusů
němčina	x	12
španělština	$x + 60$	y

Za všechny zakoupené učebnice němčiny se zaplatilo stejně jako za všechny učebnice španělštiny:

$$12x = y(x + 60)$$

Kdyby se zakoupilo 12 kusů učebnic němčiny a 12 kusů učebnic španělštiny, učebnice by stály celkem 3 600 Kč:

$$12x + 12(x + 60) = 3\,600$$

Druhou rovnicí můžeme řešit hned (pouze jedna neznámá):

$$12x + 12(x + 60) = 3\,600$$

$$12x + 12(x + 60) = 3\,600$$

$$12x + 12x + 720 = 3\,600$$

$$24x = 3\,600 - 720$$

$$x = 120$$

Dosadíme do první rovnice:

$$12x = y(x + 60)$$

$$12 \cdot 120 = y \cdot (120 + 60)$$

$$y = 8$$

Výsledek: 120 Kč za učebnici němčiny, 8 učebnic španělštiny, max. 3 body.

Jaro 2017

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{4}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{4}$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{4}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{4} \quad \text{Podmínky}$$

$$\frac{4}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{1}{4} \quad / \cdot 4(x-1) \quad x \neq 1$$

$$16 - 2(x+1) = x - 1$$

$$16 - 2x - 2 = x - 1$$

$$-3x = -15$$

$$x = 5$$

Výsledek: $x = 5$ nebo $K = \{5\}$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince.

První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí.

Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí.

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte v korunách hodnotu všech mincí na stole.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.

Řešení

Celkem je 100 mincí

počet pětikorunových mincí x

počet dvoukorunových mincí $100 - x$

$$\frac{x}{5} + \frac{100-x}{2} = 32 \quad / \cdot 10$$

$$2x + 5(100 - x) = 320$$

$$2x + 500 - 5x = 320$$

$$-3x = -180$$

$$x = 60$$

Hodnota pětikorunových: $60 \cdot 5 = 300$

Hodnota dvoukorunových: $40 \cdot 2 = 80$

Výsledek: Hodnota všech mincí na stole je 380 Kč, max. 3 body

26 Přiřaďte ke každé rovnici (26.1 – 26.3) řešené v oboru $\mathbb{R}$ odpovídající množinu všech řešení (A–E).

26.1 $x^2 = -3x$ 26.2 $\frac{9}{x} = x$ 26.3 $\frac{9-x^2}{x-3} = 0$

A) $\{-3; 3\}$ B) $\{-3; 0\}$ C) $\{0; 3\}$ D) $\{3\}$ E) $\{-3\}$

Řešení

26.1

$$x^2 = -3x$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -3$$

Správná odpověď je B.

26.2

$$\frac{9}{x} = x$$

$$\frac{9}{x} = x \quad / \cdot x$$

$$9 = x^2$$

$$x_1 = 3; x_2 = -3$$

Podmínky: $x \neq 0$, řešení vyhovuje.

Správná odpověď je A.

26.3

$$\frac{9-x^2}{x-3} = 0 \quad / \cdot (x-3)$$

$$9-x^2 = 0$$

$$9 = x^2$$

$$x_1 = 3; x_2 = -3$$

Podmínky: $x \neq 3$, vyhovuje pouze $x = -3$

Správná odpověď je E.

Výsledek: B, A, E, max. 3 body

Podzim 2016

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek.

Řešení

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

Podmínky

$$\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1-x}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2x(x-2)$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$x + 2(1-x) = x(x-2)$$

$$x + 2 - 2x = x^2 - 2x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -1$$

Vyhovuje pouze $x = -1$

Výsledek: $x = -1$ nebo $K = \{-1\}$, $x \neq 0, x \neq 2$ a postup řešení, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Sourozenci Adam, Bořek a Cyril spořili na společný dar. Bořek uspořil 11 000 korun a Cyril třetinu aritmetického průměru úspor Adama a Bořka. Všichni tři chlapci dohromady uspořili třikrát více než samotný Adam. Neznámý počet korun, které uspořil Adam, označte symbolem a .

15

15.1 Užitím rovnice s neznámou a vypočtěte, kolik korun uspořil Adam.

15.2 Vypočtěte kolik korun uspořil Cyril.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení obou částí úlohy a odpověď zapište celou větou.

Řešení

	uspořil	uspořil v Kč
Adam	a	7 000
Bořek	11 000	11 000
Cyril	$\frac{a+11000}{\frac{2}{3}} = \frac{a+11000}{6}$	3 000

Všichni tři chlapci dohromady uspořili třikrát více než samotný Adam:

$$a + 11000 + \frac{a+11000}{6} = 3a \quad / \cdot 6$$

$$6a + 66000 + a + 11000 = 18a$$

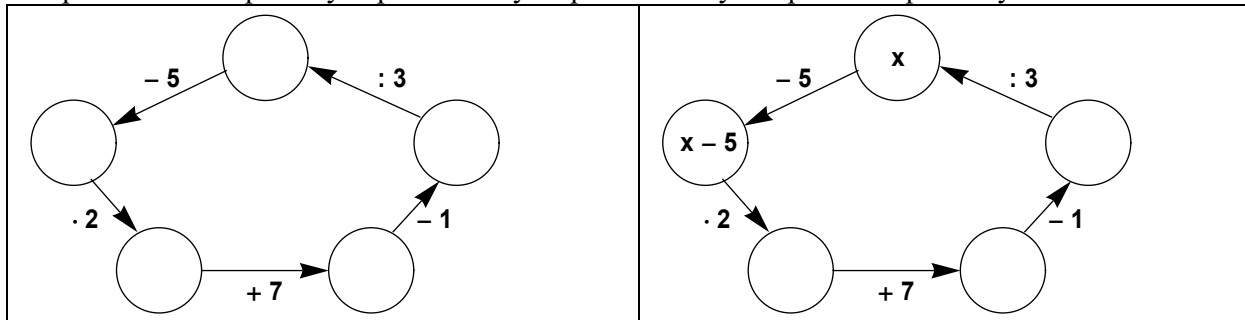
$$11a = 77000$$

$$a = 7000$$

Výsledek: Adam uspořil 7 000 Kč. Cyril uspořil 3 000 Kč, max. 3 body.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Po doplnění čísel do prázdných polí musí být zápis s uvedenými operacemi pravdivý.



Doplní-li se do jednoho prázdného pole neznámá x , pak lze rovnici dopočítat číslo, které neznámá x představuje.

23 Která z následujících rovnic odpovídá naznačenému řešení na obrázku vpravo?

A) $(x-5) \cdot 2 + 7 = 3 \cdot x + 1$ B) $(x-5) \cdot 2 + 7 = 3 \cdot (x+1)$ C) $x - 5 \cdot 2 + 7 = 3 \cdot (x+1)$

D) $x - 5 \cdot 2 + 7 = 3 \cdot x + 1$ E) žádná z uvedených

Řešení

$$\frac{(x-5) \cdot 2 + 7 - 1}{3} = x \quad / \cdot 3$$

$$(x-5) \cdot 2 + 7 - 1 = 3x$$

$$(x-5) \cdot 2 + 7 = 3x + 1$$

Výsledek: A, 2 body

Jaro 2016

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 2} - 1 = 0$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{array}{ll} \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 2} - 1 = 0 & / \cdot (2x^2 - 2) \quad \text{Podmínky} \\ 2x^2 - x - 3 - 1(2x^2 - 2) = 0 & 2x^2 - 2 \neq 0 \\ 2x^2 - x - 3 - 2x^2 + 2 = 0 & 2(x^2 - 1) \neq 0 \quad / : 2 \\ -x = 1 & (x + 1)(x - 1) \neq 0 \\ x = -1 & x \neq 1; x \neq -1 \end{array}$$

Řešení nevyhovuje.

Výsledek: Rovnice nemá řešení nebo $K = \emptyset$ a postup řešení, max. 2 body

6 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{-2}{x-2} \leq 0$

Řešení

$$\frac{-2}{x-2} \leq 0$$

Zlomek má být záporný, proto znaménka čitatele i jmenovatele musí být opačná. Čítatel je záporný, proto jmenovatel musí být kladný:

$$x - 2 > 0$$

$$x > 2$$

Výsledek: $x \in (2; \infty)$ nebo $K = (2; \infty)$, 1 bod

7 Pro kladné veličiny a, b, c platí: $c = a - b \cdot \frac{c}{2}$. Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu c .

Řešení

$$c = a - b \cdot \frac{c}{2}$$

$$c = a - \frac{bc}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2c = 2a - bc$$

$$2c + bc = 2a$$

$$c(2 + b) = 2a \quad / : (2 + b)$$

$$c = \frac{2a}{2 + b}$$

Výsledek: $c = \frac{2a}{b+2}$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Petr s Radkem si chtějí koupit stejnou knihu. Petrovi ke koupi knihy 250 korun chybí, Radkovi naopak 150 korun přebývá. Radek má třikrát více korun než Petr.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte cenu knihy.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

cena knihy x

Petr má Kč $x - 250$

Radek má $x + 150$

Radek má třikrát více korun než Petr:

$$x + 150 = 3 \cdot (x - 250)$$

$$x + 150 = 3x - 750$$

$$2x = 900$$

$$x = 450$$

Výsledek: Cena knihy je 450 Kč a postup řešení, max. 3 body

22 Je dána rovnice s neznámou $x \in R$: $\frac{1}{2x-1} = x$.

Do kterého intervalu patří oba kořeny rovnice?

A) $\langle -3, 4; -0, 6 \rangle$ B) $\langle -1, 2; 0, 6 \rangle$ C) $\langle -0, 9; 0, 9 \rangle$ D) $\langle -0, 6; 1, 2 \rangle$ E) do žádného z uvedených.

Řešení

$$\frac{1}{2x-1} = x \quad / \cdot (2x-1)$$

Podmínky

$$1 = x(2x-1)$$

$$2x-1 \neq 0$$

$$1 = 2x^2 - x$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Výsledek: D, 2 body

Podzim 2015

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{1}{3x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek.

Řešení

$$\frac{1}{3x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2} \quad / \cdot 3x(x+2) \quad \text{Podmínky}$$

$$x+2-6x=3x^2 \quad x \neq 0 \quad x \neq -2$$

$$3x^2+5x-2=0$$

$$D=b^2-4ac=5^2-4 \cdot 3 \cdot (-2)=49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -2$$

Výsledek: $x = \frac{1}{3}$ nebo $K = \left\{ \frac{1}{3} \right\}; x \neq 0; x \neq -2$ a postup řešení, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Škola zakoupila dva druhy kalkulaček. Levnější kalkulačka stála 585 Kč a dražší 630 Kč. Za nákup 60 kalkulaček škola zaplatila celkem 35 910 Kč.

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik korun škola zaplatila za nákup levnějších kalkulaček.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	počet	kolik za ně škola zaplatila
levnější	x	$585 \cdot x$
dražší	$60 - x$	$630 \cdot (60 - x)$

$$585 \cdot x + 630 \cdot (60 - x) = 35910$$

$$585x + 37800 - 630x = 35910$$

$$-45x = -1890$$

$$x = 42$$

$$585 \cdot 42 = 24570$$

Výsledek: 24 570 Kč a postup řešení, max. 3 body

26 Přiřaďte ke každé nerovnici (26.1 – 26.3) řešené v oboru $\mathbb{R}$ odpovídající množinu všech řešení (A–E).

$$26.1 \frac{3-x}{-2} < -1 \quad 26.2 \frac{2}{3-x} < 0 \quad 26.3 \frac{3-x}{x-3} > 0$$

A) $\emptyset$ B) $(-\infty; 1)$ C) $(-\infty; 3)$ D) $(1; +\infty)$ E) $(3; +\infty)$

Řešení

26.1

$$\frac{3-x}{-2} < -1 \quad / \cdot (-2)$$

$$3-x > 2$$

$$-x > -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$x < 1$$

$$x \in (-\infty; 1)$$

Správná odpověď je B.

26.2

$$\frac{2}{3-x} < 0$$

Zlomek má být záporný, proto znaménka čitatele i jmenovatele musí být opačná. Čítec je kladný, proto jmenovatel musí být záporný:

$$3-x < 0$$

$$-x < -3 \quad / \cdot (-1)$$

$$x > 3$$

$$x \in (3; \infty)$$

Správná odpověď je E.

26.3

$$\frac{3-x}{x-3} > 0$$

$$\frac{-1(x-3)}{x-3} > 0$$

$$-1 > 0 \text{ neplatí}$$

Správná odpověď je A.

Výsledek: B, E, A, max. 3 body

Jaro 2015

5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte: $\frac{y-7}{4-y} - \frac{3-2y}{y-4} = 0$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek nebo zkoušky.

Řešení

$$\frac{y-7}{4-y} - \frac{3-2y}{y-4} = 0 \quad \text{Podmínky}$$

$$\frac{y-7}{4-y} - \frac{3-2y}{-1 \cdot (4-y)} = 0 \quad y \neq 4$$

$$\frac{y-7}{4-y} + \frac{3-2y}{4-y} = 0 \quad / \cdot (4-y)$$

$$y-7+3-2y=0$$

$$-y=4$$

$$y=-4$$

Výsledek: $y = -4$ nebo $K = \{-4\}$; $y \neq 4$, max. 2 body

11 Pro veličiny $a \in (0; 2)$, $b \in \mathbb{R}^+$ platí: $1 + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$. Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu a .

Řešení

$$1 + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab} \quad / \cdot ab$$

$$ab + a = 2$$

$$a(b+1) = 2 \quad / : (b+1)$$

$$a = \frac{2}{b+1}$$

Výsledek: $a = \frac{2}{b+1}$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Čajové směsi jsou namíchané ze dvou druhů čaje. Ve standardní čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 3 a 40gramové balení této směsi se prodává za 42 Kč. Ve výběrové čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 1 a 50gramové balení této směsi se prodává za 60 Kč.

15 Vypočítejte cenu 10 gramů dražšího druhu čaje.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	cena za 10 gramů
dražší	x
levnější	y

$$x + 3y = 42 \Rightarrow x = 42 - 3y$$

$$2,5x + 2,5y = 60$$

$$2,5 \cdot (42 - 3y) + 2,5y = 60$$

$$105 - 7,5y + 2,5y = 60$$

$$y = 9$$

$$x = 42 - 3 \cdot 9 = 15$$

Výsledek: 10 gramů dražšího druhu čaje stojí 15 Kč, max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

V oboru $\mathbb{R}$ jsou dány rovnice:

$$\text{I: } 2x^2 - 4 = -4x \quad \text{II: } (2x - 1)^2 = 0 \quad \text{III: } x^2 - 1 = -(x^2 - 1)$$

18 Která z uvedených rovnic nemá řešení?

A) I a II B) II a III C) pouze I D) pouze III E) Všechny tři rovnice mají řešení

Řešení

$$\text{I: } 2x^2 - 4 = -4x$$

$$2x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 48$$

$D > 0 \Rightarrow$ rovnice má dvě řešení

$$\text{II: } (2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{III: } x^2 - 1 = -(x^2 - 1)$$

$$x^2 - 1 = -x^2 + 1$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 ; x_2 = -1$$

Všechny tři rovnice mají řešení.

Výsledek: E, 2 body

Ilustrační 2015

5 V R^2 řešte soustavu rovnic:

$$1 - 2x = 1$$

$$\frac{5}{1-y} - \frac{6}{2x+1} = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek nebo zkoušky.

Řešení

Z první rovnice vyplývá:

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

Dosadíme do druhé rovnice

$$\frac{5}{1-y} - \frac{6}{2 \cdot 0 + 1} = 0$$

$$\frac{5}{1-y} - 6 = 0 \quad / \cdot (1-y)$$

$$5 - 6(1-y) = 0$$

$$5 - 6 + 6y = 0$$

$$y = \frac{1}{6}$$

Podmínky:

$$1 - y \neq 0 \quad 2x + 1 \neq 0$$

$$y \neq 1 \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{řešení vyhovuje}$$

Výsledek: $x = 0$; $y = \frac{1}{6}$ **nebo** $K = \left\{ \left[0; \frac{1}{6} \right] \right\}$, $x \neq -\frac{1}{2}; y \neq 1$, **max. 3 body**

6 V oboru R řešte rovnici: $1 = \frac{(2x-3)^2}{12x+9}$

Řešení

$$1 = \frac{(2x-3)^2}{12x+9} \quad / \cdot (12x+9)$$

$$12x+9 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 - 24x = 0$$

$$x(4x-24) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 4x - 24 = 0$$

$$x_2 = 6$$

Podmínky: $12x+9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{9}{12} \Rightarrow x \neq -\frac{3}{4}$, řešení vyhovuje.

Výsledek: $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ **nebo** $K = \{0; 6\}$, **max. 2 body**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Janek nasbírání za 45 minut půl kbelíku malin, Eva nasbírání za hodinu celý kbelík.

8 Vypočítejte, kolik minut by trvalo naplnění jednoho kbelíku, kdyby obě děti pracovaly společně.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	za jak dlouho udělá celou práci v min	část práce za 1 min	jak dlouho pracoval v min	jakou část celkové práce udělal
Janek	90	$\frac{1}{90}$	x	$\frac{1}{90}x$
Eva	60	$\frac{1}{60}$	x	$\frac{1}{60}x$

$$\frac{x}{90} + \frac{x}{60} = 1$$

$$x = 36$$

Výsledek: Naplnění jednoho kbelíku by trvalo 36 minut., max. 3 body

9 Určete všechny hodnoty $x \in R$, které vyhovují nerovnici: $\frac{3-2x}{-2} < x$

Řešení

$$\frac{3-2x}{-2} < x \quad / \cdot (-2)$$

$$3 - 2x > -2x$$

$3 > 0$ platí pro všechny čísla

$$x \in (-\infty; \infty)$$

Výsledek: $x \in (-\infty; \infty)$ nebo $K = R$, 1 bod

Podzim 2014

5 Stanovte podmínky a v oboru R řešte: $\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0 \quad / \cdot (3x^2 - 3)$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -1$$

Podmínky: $3x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1$, vyhovuje pouze $x = -\frac{2}{3}$

Výsledek: $x = -\frac{2}{3}$ **nebo** $K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $x \neq -1; x \neq 1$, **max. 3 body**

6 Pro $x \in R$; $y \in R \setminus \{0\}$ řešte:

$$\frac{x+1}{y} = 4$$

$$2x - 4y = -6$$

Řešení

$$\frac{x+1}{y} = 4 \quad / \cdot y$$

$$2x - 4y = -6$$

$$x + 1 = 4y$$

$$2x - 4y = -6$$

$$x - 4y = -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$2x - 4y = -6$$

$$-x + 4y = 1$$

$$2x - 4y = -6$$

$$x = -5$$

$$x + 1 = 4y$$

$$-5 + 1 = 4y$$

$$y = -1$$

Podmínky: $y \neq 0$, řešení vyhovuje

Výsledek: $x = -5; y = -1$ **nebo** $K = \{[-5; -1]\}$, **max. 2 body**

7 Platí: $3 - ab = 2a + b$. Vypočtěte hodnotu a pro $b = \frac{1}{2}$.

Řešení

$$3 - ab = 2a + b, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$3 - \frac{1}{2}a = 2a + \frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$6 - a = 4a + 1$$

$$5 = 5a$$

$$a = 1$$

Výsledek: $a = 1$, 1 bod

Jaro 2014

5 V oboru R řešte: $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{x-1}$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek nebo zkoušky.

Řešení

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{x-1} \quad / \cdot 2x(x-1)$$

$$2 = 3(x-1) - 2x$$

$$2 = 3x - 3 - 2x$$

$$x = 5$$

Podmínky: $x \neq 0$; $x \neq 1$, řešení vyhovuje.

Výsledek: $x = 5$ nebo $K = \{5\}$, $x \neq 0; x \neq 1$ $L = P = \frac{1}{20}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Petr dokáže udělat celou práci sám za 6 hodin. Martin dokáže udělat stejnou práci sám za 8 hodin. Ve skutečnosti pracoval nejdříve Petr a potom ho vystřídal Martin. Celou práci tak zvládli za 6,5 hodiny. (Žádný z chlapců neměnil své pracovní tempo a střídání chlapců proběhlo bez časové prodlevy.)

14 Vypočítejte, jak dlouho pracoval Petr, než ho vystřídal Martin.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	za jak dlouho udělá celou práci v h	část práce za 1 h	jak dlouho pracoval	jakou část celkové práce udělal
Petr	6	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6}x$
Martin	8	$\frac{1}{8}$	6,5 - x	$\frac{1}{8}(6,5 - x)$

$$\frac{x}{6} + \frac{6,5 - x}{8} = 1$$

$$x = 4,5$$

Výsledek: Petr pracoval 4,5 hodiny, max. 3 body

25 Přiřaďte každé soustavě rovnic (25.1 – 25.4), kde $x \in R; y \in R$, množinu všech řešení (A – F) dané soustavy.

$$25.1 \quad \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y - 4 = 2(y - 2) \end{array} \quad 25.2 \quad \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{array} \quad 25.3 \quad \begin{array}{l} -x + 2y - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \quad 25.4 \quad \begin{array}{l} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{array}$$

A) $\emptyset$ B) $\{[2; 0]\}$ C) $\{[0; 2]\}$ D) $\{[0; -2]\}$ E) $\{[0; y], y \in R\}$ F) jiná množina

Řešení

25.1

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2y - 4 = 2(y - 2)$$

$$2y - 4 = 2y - 4 \Rightarrow \text{platí pro jakékoliv } y, \text{ tzn. } y \in R$$

Správná odpověď je E.

25.2

$$x - 2y = 4 \quad / \cdot (-2)$$

$$\underline{2x - y = 2}$$

$$-2x + 4y = -8$$

$$\underline{2x - y = 2}$$

$$3y = -6$$

$$y = -2$$

$$x - 2y = 4$$

$$x - 2 \cdot (-2) = 4$$

$$x = 0$$

Správná odpověď je D.

25.3

$$-x + 2y - 1 = 0$$

$$\underline{x - 2y = 0}$$

$$-1 = 0$$

Správná odpověď je A.

25.4

$$x = y + 2$$

$$\underline{y = x - 2}$$

$$x - y = 2$$

$$\underline{-x + y = -2}$$

$$0 = 0$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, správná odpověď je F.

Výsledek: E, D, A, F, max. 4 body

Ilustrační 2014

5 V oboru R řešte rovnici: $\frac{x-1}{3} - 3 = \frac{3x}{6} - x$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení a správnost řešení ověřte zkouškou.

Řešení

$$\frac{x-1}{3} - 3 = \frac{3x}{6} - x \quad / \cdot 6$$

$$2(x-1) - 18 = 3x - 6x$$

$$2x - 2 - 18 = -3x$$

$$x = 4$$

Zkouška

$$L(4) = \frac{4-1}{3} - 3 = -2$$

$$P(4) = \frac{3 \cdot 4}{6} - 4 = -2$$

Výsledek: $x = 4$ nebo $K = \{4\}$, zkouška: $L(4) = P(4) = -2$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V Kocourkově se jedenkrát ročně plní městská sýpka. Pracovité kočky by sýpku naplnily samy za 2 hodiny, ale kocourům by stejná práce trvala 5 hodin. Myšky zlodějky umí plnou sýpku vyprázdnit za 10 hodin. (Veškeré činnosti se provádějí rovnoměrným tempem.)

Letos se do plnění prázdné sýpky pustili nejprve samotní kocouři. Po hodině práce jim přišly pomoci kočky, ale současně s nimi začaly sýpku vykrádat myšky. Všichni pak pokračovali až do okamžiku, kdy byla sýpka plná.

15

15.1 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, za jak dlouho byla sýpka plná.

15.2 Zapište zlomkem, jakou část sýpky myšky rozkradly.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	za jak dlouho udělá celou práci v h	část práce za 1 h	jak dlouho pracoval	jakou část celkové práce udělal
kočky	2	$\frac{1}{2}$	$x - 1$	$\frac{x-1}{2}$
kocouři	5	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$
myšky	10	$\frac{1}{10}$	$x - 1$	$\frac{x-1}{10}$

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x-1}{10} = 1 \quad / \cdot 10$$

$$5(x-1) + 2x - 1 \cdot (x-1) = 10$$

$$5x - 5 + 2x - x + 1 = 10$$

$$x = \frac{14}{6}$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

$$\frac{x-1}{10}, x = \frac{14}{6} : \frac{\frac{14}{6} - 1}{10} = \frac{2}{15}$$

Výsledek: Sýpka byla plná za 2 h 20 minut, 3 body, myšky rozkradly $\frac{2}{15}$, 1 bod

25 Přiřaďte každé úloze (25.1 – 25.4) s neznámou $x \in R$ odpovídající řešení (A – F).

$$25.1 \frac{(x-2)^2}{2-x} = 0 \quad 25.2 \frac{2-x}{2} \leq 0 \quad 25.3 -2 \cdot (x-2) \geq 0 \quad 25.4 (x-2) \cdot (2-2) \leq 0$$

A) $\emptyset$ B) $\mathbf{R}$ C) $\{2\}$ D) $\langle 2; \infty$ E) $(-\infty; 2\rangle$ F) jiné řešení

Řešení

25.1

$$\frac{(x-2)^2}{2-x} = 0 \quad / \cdot (2-x)$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Podmínky: $x \neq 2$, řešení nevyhovuje, rovnice nemá řešení.

Správná odpověď je A.

25.2

$$\frac{2-x}{2} \leq 0 \quad / \cdot 2$$

$$2-x \leq 0$$

$$-x \leq -2 \quad / \cdot (-1)$$

$$x \geq 2$$

$$x \in \langle 2; \infty$$

Správná odpověď je D.

25.3

$$-2 \cdot (x-2) \geq 0$$

$$-2x + 4 \geq 0$$

$$-2x \geq -4 \quad / : (-2)$$

$$x \leq 2$$

$$x \in (-\infty; 2\rangle$$

Správná odpověď je E.

25.4

$$(x-2) \cdot (2-2) \leq 0$$

$$(x-2) \cdot 0 \leq 0$$

$$0 \leq 0$$

$$x \in (-\infty; \infty) \text{ nebo } x \in R$$

Správná odpověď je B.

Výsledek: A, D, E, B, max. 4 body

Podzim 2013

5 V oboru R řešte: $2 \cdot \frac{3y}{5} = \frac{2y-3}{2} + 1$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$2 \cdot \frac{3y}{5} = \frac{2y-3}{2} + 1$$

$$\frac{6y}{5} = \frac{2y-3}{2} + 1 \quad / \cdot 10$$

$$12y = 5(2y-3) + 10$$

$$12y = 10y - 15 + 10$$

$$y = -\frac{5}{2}$$

Výsledek: $y = -\frac{5}{2}$ nebo $K = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$, max. 2 body

10 V oboru R řešte: $\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x}$

Řešení

$$\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x} \quad / \cdot 2x$$

$$x^2 = 2x + 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 4; x_2 = -2$$

Podmínky: $x \neq 0$, řešení vyhovuje

Výsledek: $x_1 = 4; x_2 = -2$ nebo $K = \{-2; 4\}$, max. 2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Mošt se prodává v 5litrových a 2litrových lahvích. Pan Suchánek si koupil celkem 216 litrů moštu v 60 lahvích. (Všechny zakoupené lahve byly plné.)

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete, kolik litrů moštu si koupil pan Suchánek v 5litrových lahvích.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

	počet lahví	počet litrů
5 l	x	$5x$
2 l	$60 - x$	$2(60 - x)$

$$5x + 2(60 - x) = 216$$

$$5x + 120 - 2x = 216$$

$$x = 32$$

$$32 \cdot 5 = 160$$

Výsledek: 160 litrů, max. 3 body

26 Přiřaďte ke každému vztahu (26.1 – 26.3) odpovídající vyjádření veličiny a (A – F), kde $a, b \in R$.

26.1 $b - 2a = 1 - 3a$ 26.2 $2a - b = b - 2$ 26.3 $\frac{2a - b}{2} = a + 1$

A) $a = b - 1$ B) $a = b + 1$ C) $a = 1 - b$ D) $a = b + 2$ E) Žádné z uvedených vyjádření nevyhovuje

Řešení

26.1

$$b - 2a = 1 - 3a$$

$$3a - 2a = 1 - b$$

$$a = 1 - b$$

Správná odpověď je C.

26.2

$$2a - b = b - 2$$

$$2a = 2b - 2$$

$$a = \frac{2b - 2}{2}$$

$$a = \frac{2(b - 1)}{2}$$

$$a = b - 1$$

Správná odpověď je A.

26.3

$$\frac{2a - b}{2} = a + 1 \quad | \cdot 2$$

$$2a - b = 2a + 2$$

$$-b = 2$$

a může být jakékoliv

Správná odpověď je E.

Výsledek: C, A, E, max. 3 body

Jaro 2013

5 V oboru R řešte: $\frac{x-1}{2} - 3\frac{x+1}{6} < x$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\frac{x-1}{2} - 3\frac{x+1}{6} < x$$

$$\frac{x-1}{2} - \frac{3(x+1)}{6} < x \quad / \cdot 12$$

$$6(x-1) - 2 \cdot 3 \cdot (x+1) < 12x$$

$$6x - 6 - 6x - 6 < 12x$$

$$-12x < 12 \quad / : (-12)$$

$$x > -1$$

Výsledek: $x > -1$, resp. $x \in (-1; \infty)$, max. 2 body

6 V oboru R řešte: $3x(x+1) = 9x^2$

Řešení

$$3x(x+1) = 9x^2$$

$$3x^2 + 3x = 9x^2$$

$$6x^2 - 3x = 0$$

$$x(6x-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 6x - 3 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Výsledek: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$ nebo $K = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Žákovský oddíl karate má dvakrát více chlapců než dívek. Na závody se má sestavit jedno družstvo dívek a stejně početné družstvo chlapců. Do chlapeckého družstva se nedostane 12 hochů, naopak k sestavení kompletního dívčího družstva 1 děvče chybí.

14 Kolik členů je v žakovském oddílu karate?

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

$$\begin{array}{ll} \text{dívek} & x \\ \text{chlapců} & 2x \end{array}$$

$$2x - 12 = x + 1$$

$$x = 13$$

$$\begin{array}{ll} \text{dívek} & 13 \\ \text{chlapců} & 26 \end{array}$$

Výsledek: V žakovském oddílu karate je 39 členů, max. 3 body

19 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a $n \in \mathbb{N}$ je dán vztah $n = \frac{5}{x-3}$. Které z následujících tvrzení platí?

A) $x = \frac{5n-3}{n}$ B) $x = \frac{5}{n+3}$ C) $x = \frac{n-3}{5}$ D) $x = \frac{5}{n} + 3$ E) $x = \frac{5}{n} - 3$

Řešení

$$n = \frac{5}{x-3} \quad / \cdot (x-3)$$

$$n(x-3) = 5$$

$$nx - 3n = 5$$

$$nx = 5 + 3n \quad / : n$$

$$x = \frac{5 + 3n}{n}$$

$$x = \frac{5}{n} + \frac{3n}{n}$$

$$x = \frac{5}{n} + 3$$

Výsledek: D, 2 body

Ilustrační 2013

4 Zapište intervalem množinu všech $x \in R$, pro něž platí současně dvě podmínky:

$$2x + 4 > 0$$

$$\frac{3-x}{2} \geq 0$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

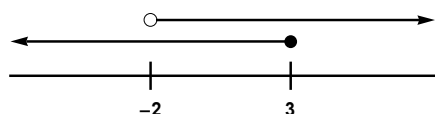
Řešení

$$2x + 4 > 0 \quad \frac{3-x}{2} \geq 0 \quad / \cdot 2$$

$$2x > -4 \quad / : 2 \quad 3 - x \geq 0$$

$$x > -2 \quad -x \geq -3 \quad / \cdot (-1)$$

$$x \leq 3$$



Výsledek: $x \in (-2; 3]$ a postup řešení, max. 2 body

7 Jedním z kořenů kvadratické rovnice $(x-2) + (x+2)(x-2) = 0$ je $x = 2$.

Vypočtete druhý kořen.

Řešení

$$(x-2) + (x+2)(x-2) = 0$$

$$x - 2 + x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -3$$

Výsledek: Druhý kořen je $x_2 = -3$, 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Součet dvou přirozených čísel je o 50 % větší než jejich rozdíl. Menší z obou čísel je 15.

14 Určete větší z obou čísel.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení

x větší z obou čísel

$$x + 15 = 1,5(x - 15)$$

$$x + 15 = 1,5x - 22,5$$

$$x = 75$$

Výsledek: 75, max. 3 body

17 Který z uvedených vztahů je odvozen ze vzorce $v = \frac{2s}{t_1 + t_2}$?

A) $s = \frac{2v}{t_1 + t_2}$ B) $s = \frac{2(t_1 + t_2)}{v}$ C) $s = \frac{v(t_1 + t_2)}{2}$ D) $s = \frac{t_1 + t_2}{2v}$ E) $\frac{v}{2(t_1 + t_2)}$

Řešení

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} \quad / \cdot (t_1 + t_2)$$

$$v \cdot (t_1 + t_2) = 2s \quad / : 2$$

$$s = \frac{v \cdot (t_1 + t_2)}{2}$$

Výsledek: C, 2 body
