

Odmocniny, Mocniny s racionálními exponenty – základní teorie

Definice: n-tá odmocnina

n – tá odmocnina z **nezáporného** čísla a je takové **nezáporné** číslo b , pro které platí:

$$b^n = a$$

Tedy:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ právě tehdy, když } b^n = a.$$

☞ n – tá odmocnina existuje pouze pro kladná čísla a pro nulu

☞ n – tá odmocnina je vždy kladná nebo rovna nule

Pro kladné hodnoty x platí:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[4]{x^4} = x$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

Důležitá věta pro počítání s odmocninami

Odmocnina součinu je rovna součinu odmocnin jednotlivých činitelů.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Např.:

$$\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$$

$$\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^3} = 2x$$

$$\sqrt{2x} \cdot \sqrt{32x} = \sqrt{2x \cdot 32x} = \sqrt{64x^2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{x^2} = 8x$$

Neexistuje pravidlo pro odmocninu součtu ani rozdílu!

Např.:

$$\sqrt{25+16} \neq \sqrt{25} + \sqrt{16}$$

Definice: mocnina s racionálním exponentem

Pro každé kladné reálné číslo a , pro každé celé číslo m a pro každé přirozené číslo n definujeme mocninu s racionálním exponentem vztahem:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Například:

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

$$x^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{x^3}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

Pro počítání s mocninami s racionálním exponentem platí stejné věty jako pro počítání s mocninami s celočíselným exponentem.

Mocniny se stejným základem násobíme tak, že základ opíšeme a exponenty sečteme.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Mocniny se stejným základem dělíme tak, že základ opíšeme a exponenty odečteme.

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} ; a \neq 0$$

Mocninu umocníme tak, že základ opíšeme a exponenty vynásobíme.

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Součin umocníme tak, že umocníme každého činitele.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Podíl umocníme tak, že umocníme čitatele i jmenovatele.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; a \neq 0 ; b \neq 0$$