Geometrická posloupnost

Co to je geometrická posloupnost?

Řada čísel, která je určena prvním členem a_1 a kvocientem q, další členy posloupnosti získáme tak, že vždy **předchozí** člen **násobíme** kvocientem.

Příklady geometrických posloupností:

a_1	q	členy posloupnosti
5	2	5; 10; 20; 40; 80; ...
4	–2	4; –8; 16; –32; 64; ...
16	0,5	16; 8; 4; 2; 1; 0,5, ...
64	–0,25	64; –16; 4; –1; 0,25; ...

Jak poznáme, jestli daná řada čísel je geometrickou posloupností?

Jestliže libovolný člen posloupnosti vydělíme **předcházejícím** členem, musí vycházet vždy stejné číslo – toto číslo je kvocient geometrické posloupnosti.

Příklady

řada čísel	**je to geometrická posloupnost?**	**kvocient**
2; 6; 18; 54; ...	ANO	3
1; –2; 4; –8; 16; –32; ...	ANO	–2
32; 16; 8; 4; 2; 1; 0,5; ...	ANO	0,5

Důležité vzorce – všechny jsou v MFCHT

Jak vypočítat libovolný člen, jestliže známe první člen a kvocient – vzorec pro n-tý člen

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Např.: $a_8 = a_1 \cdot q^7$; $a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$

Jak vypočítat součet prvních n členů

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Např.: $s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$

Jak určit libovolný člen, jestliže známe jiný člen a kvocient

$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Např.: $a_{20} = a_{13} \cdot q^{20-13} = a_{13} \cdot q^7$; $a_9 = a_3 \cdot q^{9-3} = a_3 \cdot q^6$

Tento vzorec můžeme použít i v případě, kdy známe dva členy a máme určit kvocient

Například:

$a_{18} = a_{13} \cdot q^{18-13} \quad / : a_{13}$

$\dfrac{a_{18}}{a_{13}} = q^5$

$q = \sqrt[5]{\dfrac{a_{18}}{a_{13}}}$

Jak řešit některé příklady bez použití vzorců

1) Je zadán určitý člen posloupnosti a její kvocient, určete jiný člen.

Postup:

- ☞ pokud máme určit člen s vyšším pořadovým číslem, tak násobíme kvocientem,
- ☞ pokud máme určit člen s nižším pořadovým číslem, tak dělíme kvocientem.

Příklad a) Známe $a_{12} = 3$, $q = 2$, máme určit a_{19}.

Od a_{12} do a_{19} to je 7 „skoků“ dopředu, tj. násobíme 7-krát kvocientem:

$a_{19} = a_{12} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^7 = 384$

Příklad b) Známe $a_{25} = 64$, $q = 2$, máme určit a_{19}.

Od a_{25} do a_{19} to je 6 „skoků“ zpátky, tj. dělíme 6-krát kvocientem:

$a_{19} = a_{25} : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 = 64 : 2^6 = 1$

2) Známe dva členy posloupnosti, určete její kvocient.

Příklad a) $a_{16} = 5$; $a_{19} = 135$, máme určit kvocient.

Z a_{16} do a_{19} se dostaneme třemi „skoky“, tj. třikrát násobíme kvocientem:

$5 \cdot q \cdot q \cdot q = 135; \; q^3 = \dfrac{135}{5}; \; q = 3$

Příklad b) $a_{13} = 64$; $a_{17} = 4$, máme určit kvocient.

Z a_{13} do a_{17} se dostaneme čtyřmi „skoky“, tj. čtyřikrát násobíme kvocientem:

$64 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 4; \; q^4 = \dfrac{4}{64}; \; q = \dfrac{1}{2}$.

Základní příklady řešené pomocí vzorců

1) V geometrické posloupnosti je $a_4 = 81$, $q = 3$. Určete a_1.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad / : q^3$

$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{81}{3^3} = 3$

První člen posloupnosti $a_1 = 3$.

2) V geometrické posloupnosti je dáno: $a_3 = 18$, $a_4 = 162$. Určete a_1.

$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{162}{18} = 9$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad / : q^2$

$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{18}{9^2} = \frac{2}{9}$

První člen posloupnosti $a_1 = \frac{2}{9}$.

3) V geometrické posloupnosti je dáno: $a_4 = 81$, $a_9 = 19683$. Určete q.

Použijeme vzorec $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4}$

$19\,683 = 81 \cdot q^5 \quad / : 81$

$\frac{19\,683}{81} = q^5$

$q = \sqrt[5]{\frac{19\,683}{81}} = 3$

Kvocient posloupnosti je $q = 3$.

4) Určete součet čísel 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ..., čísel je celkem 25.
Jedná se o geometrickou posloupnost s $a_1 = 1$, $q = 2$, máme vypočítat součet prvních 25 členů:

$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad s_{25} = 1 \cdot \frac{2^{25} - 1}{2 - 1} = 33\ 554\ 431.$

Součet prvních 25 členů je 33 554 431.

5) Určete součet čísel $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+2+8+32+\cdots+131072$.

Jedná se o geometrickou posloupnost s $a_1=\frac{1}{8},\ q=4$. Nejprve musíme určit počet čísel *n*.

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$131\,072=\frac{1}{8}\cdot 4^{n-1}\quad /\cdot 8$

$1048\,576=4^{n-1}\quad /\log$ kromě logaritmování lze tuto rovnici řešit i zkusmo na kalkulačce

$\log 1048\,576=(n-1)\cdot\log 4$

$n-1=\frac{\log 1048\,576}{\log 4}=10$

$n=11$

$s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$s_{11}=\frac{1}{8}\cdot\frac{4^{11}-1}{4-1}=174\,762{,}625$

Součet čísel je 174 762,625.