Obecná rovnice přímky

Zadání

1) Rozhodněte, zda bod $A = [-2; 6]$ leží na přímce o rovnici $4x + 3y - 10 = 0$.

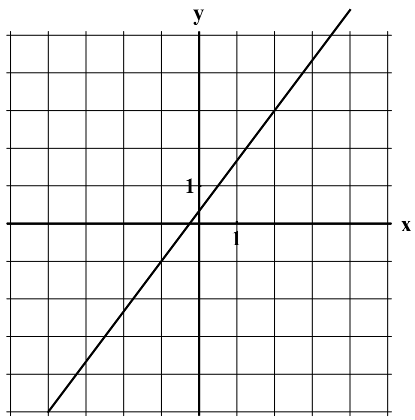
2) Rozhodněte, zda bod $B = [7; 1]$ leží na přímce o rovnici $4x + 3y - 10 = 0$.

3) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-4; 5]$ a její směrový vektor je $\vec{s} = (2; -3)$.

4) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $B = [-2; 6]$ a její normálový vektor je $\vec{n} = (-4; -3)$.

5) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází body $K = [-4; 5]$, $L = [8; -2]$.

6) Určete obecnou rovnici přímky určené grafem:



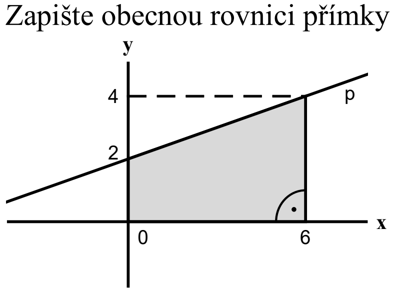
7) Najděte souřadnice bodů, v nichž přímka p: $5x + 2y - 13 = 0$ protíná osy x a y.

8) Napište obecnou rovnici přímky zadané parametricky rovnicemi: $x = -4 + 2t$; $y = 9 - 3t$.

9) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A = [4; -5]$ a je rovnoběžná s přímkou q o rovnici $4x - 2y + 15 = 0$.

10) Napište obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $K = [-1; 3]$ a je kolmá k přímce r o rovnici $5x + 3y - 7 = 0$.

11) Zapište obecnou rovnici přímky p znázorněné na obrázku:



12) Najděte číslo y tak, aby bod $A = [-8; y]$ byl bodem přímky určené body $K = [-5; 2]$, $L = [13; 8]$.

13) Určete průsečík přímek p, q: $p: 4x + 5y - 6 = 0$; $q: 2x - 3y + 5 = 0$.

14) Určete odchylku přímek $p: 6x - 4y + 5 = 0$; $q: 3x - 5y - 4 = 0$.

15) Určete vzdálenost bodu $B = [8; -3]$ od přímky $q: 2x - 7y + 3 = 0$.

16) Je dán $\triangle$ABC: A = [5, 6], B = [4, 2], C = [–8, 7]. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží strana a.

17) Je dán △ABC: A = [5, 6], B = [4, 2], C = [–9, 8]. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží těžnice t_b.

18) Je dán △ABC: A = [5, 6], B = [4, 2], C = [–8, 7]. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží výška v_c.

19) Je dán △ABC: A = [5, 6], B = [4, 2], C = [–9, 8]. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží osa strany *b*.

20) V kartézské souřadnicové soustavě jsou dány body $A[5;2], B[1;5], C[-2;1]$. Tyto body tvoří trojúhelník ABC. Jaká je velikost výšky v_b (výšky na stranu b)?

21) Určete vzdálenost rovnoběžek *p*, *q* o rovnicích $p: 3x-5y+4=0;\ q: 3x-5y-2=0$.

22) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou dány dvě rovnoběžné přímky *p*, *q*. Přímka *p* je určena rovnicí $x+2y+4=0$, přímka *q* prochází bodem $Q[1;0]$.

a) Zapište obecnou rovnici přímky *q*.

b) Vypočtěte vzdálenost přímek *p*, *q*.

Řešení

1) Rozhodněte, zda bod $A = [-2; 6]$ leží na přímce o rovnici $4x+3y-10=0$.

Postup

$A=[-2;\ 6]:\ 4\cdot(-2)+3\cdot 6-10=0$

$-8+18-10=0$

$0=0$

Bod *A* leží na přímce.

---

2) Rozhodněte, zda bod $B = [7; 1]$ leží na přímce o rovnici $4x+3y-10=0$.

Postup

$B=[7;\ 1]:\ 4\cdot 7+3\cdot 1-10=0$

$28+3-10=0$

$21\neq 0$

Bod B neleží na přímce.

---

3) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A=[-4;\ 5]$ a její směrový vektor je $\vec{s}=(2;\ -3)$.

Postup

$\vec{s}=(b;\ -a)$

$\vec{s}=(2;\ -3)\ \Rightarrow\ a=3, b=2$

$3x+2y+c=0$

$A=[-4;\ 5]: 3\cdot(-4)+2\cdot 5+c=0$

$c=2$

Obecná rovnice přímky je $3x+2y+2=0$.

---

4) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $B=[-2;\ 6]$ a její normálový vektor je $\vec{n}=(-4;\ -3)$.

Postup

$\vec{n}=(a;\ b)$

$\vec{n}=(-4;\ -3)\ \Rightarrow\ a=-4;\ b=-3$

$-4x-3y+c=0$

$B=[-2;\ 6]: -4\cdot(-2)-3\cdot 6+c=0$

$c=10$

Obecná rovnice přímky je $-4x-3y+10=0$**.**

---

5) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází body $K=[-4;\ 5]$, $L=[8;\ -2]$.

Postup

$\vec{s}=\overrightarrow{KL}=L-K=(12;\ -7)$

$a=7,\ b=12$

$7x+12y+c=0$

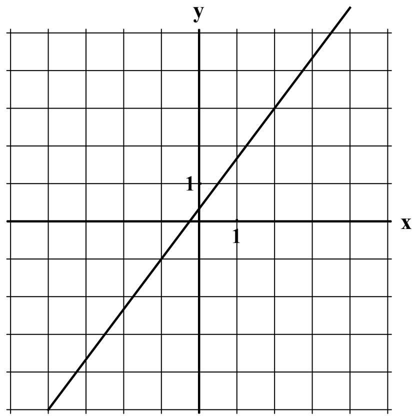
$K=[-4;\ 5]:\ 7\cdot(-4)+12\cdot 5+c=0$

$c=-32$

Obecná rovnice přímky je $7x+12y-32=0$**.**

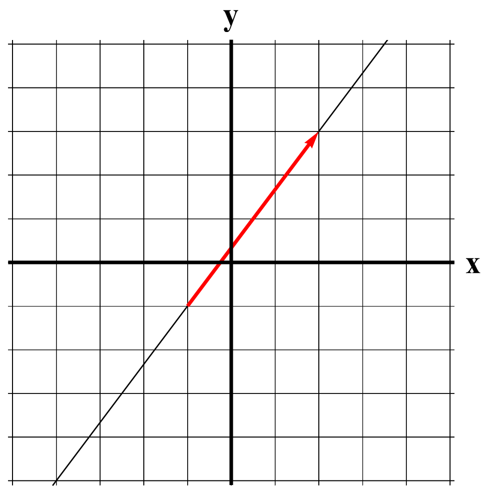
---

6) Určete obecnou rovnici přímky určené grafem:



Postup

Z grafu můžeme určit směrový vektor přímky a její bod:



$\vec{s} = (3;\ 4) \ \Rightarrow\ a = -4,\ b = 3$

$-4x + 3y + c = 0$

$A = [2;3] : -4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + c = 0$

$c = -1$

Obecná rovnice přímky je $-4x + 3y - 1 = 0$ **.**

---

7) Najděte souřadnice bodů, v nichž přímka p: $5x + 2y - 13 = 0$ protíná osy *x* a *y*.

Postup

Průsečík přímky s osou x

Každý bod na ose *x* má *y*-ovou souřadnici rovnou nule, do rovnice přímky proto dosadíme za *y* nulu a vypočítáme *x*:

$5x + 2 \cdot 0 - 13 = 0$

$x = \frac{13}{5}$

Přímka protíná osu *x* v bodě $\left[\frac{13}{5};\ 0\right]$**.**

Průsečík přímky s osou y
Každý bod na ose y má x-ovou souřadnici rovnou nule, do rovnice přímky proto dosadíme za x nulu a vypočítáme y:

$5 \cdot 0 + 2y - 13 = 0$

$y = \frac{13}{2}$

Přímka protíná osu y v bodě $\left[0;\ \frac{13}{2}\right]$.

---

8) Napište obecnou rovnici přímky zadané parametricky rovnicemi: $x = -4 + 2t;\ \ y = 9 - 3t$.

Postup

Z parametrického vyjádření přímky můžeme určit bod přímky a její směrový vektor.

$A = [-4;\ 9],\ \vec{s} = (2;\ -3)$

$a = 3, b = 2$

$3x + 2y + c = 0$

$A = [-4;\ 9]:\ 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 9 + c = 0$

$c = -6$

Obecná rovnice přímky je $3x + 2y - 6 = 0$.

---

9) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A = [4;\ -5]$ a je rovnoběžná s přímkou q o rovnici $4x - 2y + 15 = 0$.

Postup

Rovnoběžné přímky mají stejné koeficienty a, b, liší se koeficientem c:

$4x - 2y + c = 0$

$[4;\ -5]:\ 4 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) + c = 0$

$c = -26$

Obecná rovnice přímky je $4x - 2y - 26 = 0$.

---

10) Napište obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $K = [-1;\ 3]$ a je kolmá k přímce r o rovnici $5x + 3y - 7 = 0$.

Postup

daná přímka: $5x + 3y - 7 = 0$

kolmá přímka: $3x - 5y + c = 0$ – viz *Jednoduché pravidlo pro určení kolmé přímky*

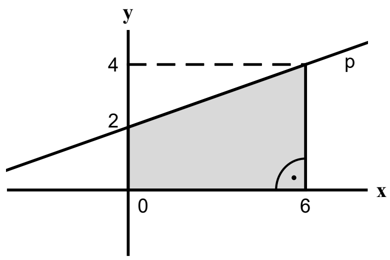
$K = [-1;\ 3]: 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 + c = 0$

$c = 18$

Obecná rovnice přímky je $3x - 5y + 18 = 0$.

---

11) Zapište obecnou rovnici přímky p znázorněné na obrázku:



Postup

Z obrázku vyčteme, že přímka p je určena dvěma body $A = [0;\ 2]$, $B = [6;\ 4]$.

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (6; 2)$

$a = -2;\ b = 6$

$-2x + 6y + c = 0$

$A: -2 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + c = 0$

$c = -12$

Obecná rovnice přímky *p* je $-2x + 6y - 12 = 0$**.**

---

12) Najděte číslo y tak, aby bod $A = [-8;\ y]$ byl bodem přímky určené body

$K = [-5;\ 2]$, $L = [13;\ 8]$.

Postup

Nejprve určíme rovnici přímky:

$\vec{s} = \overrightarrow{KL} = L - K = (18;\ 6)$

$a = -6, b = 18$

$-6x + 18y + c = 0$

$[-5;\ 2]: -6 \cdot (-5) + 18 \cdot 2 + c = 0$

$c = -66$

Rovnice přímky je $-6x + 18y - 66 = 0$

Nyní určíme chybějící souřadnici bodu A:

$A = [-8;\ y]: -6 \cdot (-8) + 18y - 66 = 0$

$y = 1$

Číslo $y = 1$**.**

---

13) Určete průsečík přímek p, q: $p: 4x+5y-6=0$; $q: 2x-3y+5=0$.

Postup

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ll} 4x+5y=6 & 4x+5y=6 \ /\cdot 3 \\ \underline{2x-3y=-5} \ /\cdot(-2) & \underline{2x-3y=-5} \ /\cdot 5 \\ 4x+5y=6 & 12x+15y=18 \\ \underline{-4x+6y=10} & \underline{10x-15y=-25} \\ 11y=16 & 22x=-7 \\ y=\dfrac{16}{11} & x=-\dfrac{7}{22} \end{array}$$

Průsečíkem přímek je bod $P=\left[-\frac{7}{22}; \frac{16}{11}\right]$

---

14) Určete odchylku přímek $p: 6x-4y+5=0$; $q: 3x-5y-4=0$.

Postup

Vezmeme normálové vektory: $\vec{u}=(6; -4)$, $\vec{v}=(3; -5)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{|6\cdot 3+(-4)\cdot(-5)|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-5)^2}}=0,9037$$

$\alpha=25,35°$

Odchylka přímek je $\alpha=25,35°$.

---

15) Určete vzdálenost bodu $B=[8; -3]$ od přímky $r: 2x-7y+3=0$.

Postup

$$|Br|=\frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot 8-7\cdot(-3)+3|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=5,49$$

Vzdálenost bodu B **od přímky** r **je** $|Br|=5,49$ **.**

---

16) Je dán $\triangle ABC$: $A=[5, 6]$, $B=[4, 2]$, $C=[-8, 7]$. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží strana a.

Postup

Přímka, na níž leží strana a, prochází body B, C:

$\vec{s}=\overrightarrow{BC}=C-B=(-12; 5)$

$a=-5; b=-12$

$-5x-12y+c=0$

$B=[4; 2]: -5\cdot 4-12\cdot 2+c=0$

$c=44$

Přímka, na níž leží strana *a* má obecnou rovnici $-5x-12y+44=0$

---

17) Je dán $\triangle ABC$: $A = [5, 6]$, $B = [4, 2]$, $C = [-9, 8]$. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží těžnice t_b.

Postup

Přímka, na níž leží těžnice t_b, prochází bodem B a středem strany AC:

$$S = \frac{A+C}{2} : x = \frac{5+(-9)}{2} = -2$$

$$y = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$S = [-2;7]$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{BS} = S - B = (-6;5)$$

$$a = -5;\ b = -6$$

$$-5x - 6y + c = 0$$

$$B = [4;\ 2] : -5 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + c = 0$$

$$c = 32$$

Přímka, na níž leží těžnice t_b má obecnou rovnici $-5x - 6y + 32 = 0$

---

18) Je dán $\triangle ABC$: $A = [5, 6]$, $B = [4, 2]$, $C = [-8, 7]$. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží výška v_c.

Postup

Přímka, na níž leží výška v_c, je určena bodem C a normálovým vektorem $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1;-4)$$

$$a = -1; b = -4$$

$$-x - 4y + c = 0$$

$$C = [-8;7] : -(-8) - 4 \cdot 7 + c = 0$$

$$c = 20$$

Přímka, na níž leží výška v_c, má obecnou rovnici $-x - 4y + 20 = 0$

---

19) Je dán $\triangle ABC$: $A = [5, 6]$, $B = [4, 2]$, $C = [-9, 8]$. Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží osa strany b.

Postup

Osa strany je přímka, která prochází středem strany b kolmo na tuto stranu. Je tedy určena středem strany AC a normálovým vektorem AC.

$$S = \frac{A+C}{2} : x = \frac{5+(-9)}{2} = -2$$

$$y = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$S = [-2;7]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-14;2)$$

$$a = -14;\ b = 2$$

$$-14x + 2y + c = 0$$

$$S = [-2;\ 7] : -14 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + c = 0$$

$$c = -42$$

Přímka, na níž leží osa strany b má obecnou rovnici $-14x + 2y - 42 = 0$.

---

20) V kartézské souřadnicové soustavě jsou dány body $A[5;2], B[1;5], C[-2;1]$. Tyto body tvoří trojúhelník ABC. Jaká je velikost výšky v_b (výšky na stranu b)?

Postup

Velikost výšky v_b je rovna velikosti úsečky, která spojuje vrchol *B* trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímce, na které leží protější strana *b* trojúhelníku (tato přímka prochází body A, C).

Velikost výšky v_b tedy spočítáme jako vzdálenost bodu *B* od přímky určené body *A*, *C*.

1. krok – určíme obecnou rovnici přímky určené body A, C

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-7; -1)$

$a = 1; b = -7$

$x - 7y + c = 0$

$A = [5;\ 2]: 5 - 7 \cdot 2 + c = 0$

$c = 9$

Přímka, na níž leží strana *b* má obecnou rovnici $x - 7y + 9 = 0$

2. krok – určíme vzdálenost bodu $B[1;5]$ od $x - 7y + 9 = 0$

$$|Bb| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 7 \cdot 5 + 9|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = 3,54j$$

Velikost výšky $v_b = 3,54j$.

---

21) Určete vzdálenost rovnoběžek *p*, *q* o rovnicích

$p: 3x - 5y + 4 = 0;\ q: 3x - 5y - 2 = 0$.

Postup

Určíme libovolný bod, který leží na přímce *p* a pak určíme vzdálenost tohoto bodu od přímky *q*.

1. krok

zvolíme $x = 0$

$p:\ 3 \cdot 0 - 5y + 4 = 0$

$y = \frac{4}{5}$

$M = \left[0; \frac{4}{5}\right]$

2. krok: určíme vzdálenost bodu *M* od přímky *q* podle příslušného vzorce.

$$|Mq| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|3 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{4}{5} - 2\right|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} \doteq 1,03j$$

Vzdálenost rovnoběžek je $p: 3x - 5y + 4 = 0, q: 3x - 5y - 2 = 0$ je $1,03j$.

---

22) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou dány dvě rovnoběžné přímky *p*, *q*. Přímka *p* je určena rovnicí $x+2y+4=0$, přímka *q* prochází bodem $Q[1;0]$.

a) Zapište obecnou rovnici přímky *q*.

b) Vypočtěte vzdálenost přímek *p*, *q*.

Postup

a)

Protože přímka *q* je rovnoběžná s přímkou *p*, tak koeficienty *a*, *b* obou přímek jsou stejné, liší se pouze koeficientem *c*.

$q: x+2y+c=0$

$Q[1;0]: 1+2\cdot 0+c=0$

$c=-1$

Obecná rovnice přímky q je $x+2y-1=0$

b)

Vzdálenost rovnoběžek určíme stejně jako v předchozím příkladě.

zvolíme $y=0$

$p:\ x+2\cdot 0+4=0$

$x=-4$

$M=[-4;0]$

$$|Mq|=\frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-4+2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}\doteq\sqrt{5}\,j$$

Vzdálenost rovnoběžek je $p: x+2y+4=0, q: x+2y-1=0$ je $\sqrt{5}\,j$ **.**