

Obecná rovnice přímky

Teorie

Každá přímka v rovině se dá vyjádřit lineární rovnicí tvaru:

$$ax + by + c = 0$$

kde a, b, c jsou reálné konstanty, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly.

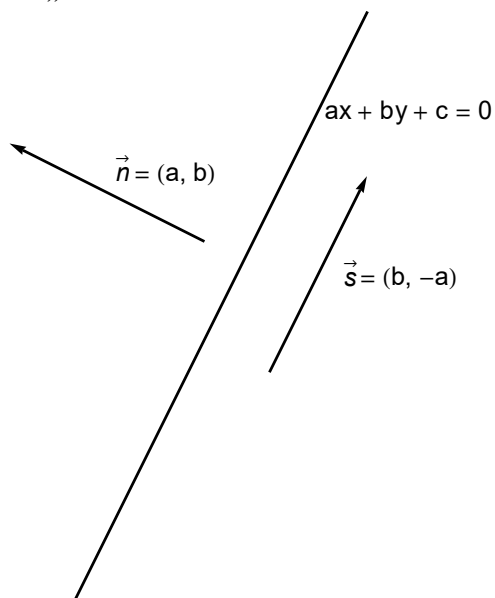
Tato rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**.

$$ax + by + c = 0 \quad \text{obecná rovnice přímky}$$

$$\vec{s} = (b; -a) \quad \text{„základní“ směřový vektor přímky (rovnoběžný s přímkou)}$$

$$\vec{n} = (a; b) \quad \text{„základní“ normálový vektor přímky (kolmý na přímku)}$$

Směrových a normálových vektorů je nekonečně mnoho, jsou to i libovolné nenulové násobky těchto „základních“.



Příklady obecných rovnic přímky

$$3x - 5y + 2 = 0$$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (3; -5)$, další normálové vektory $(6; -10), (-3; 5)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (-5; -3)$, další směrové vektory $(5; 3), (-10; -6)$ atd.

$$6x - 5 = 0$$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (6; 0)$, další normálové vektory $(-6; 0), (-3; 0)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (0; -6)$, další směrové vektory $(0; -3), (0; 6)$ atd.

$$7y - 8 = 0$$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (0; 7)$, další normálové vektory $(0; -7), (0; 2)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (7; 0)$, další směrové vektory $(-7; 0), (3; 0)$ atd.

DŮLEŽITÁ POZNÁMKA

Jestliže známe nebo dokážeme určit směrový nebo normálový vektor přímky, tak z jeho souřadnic můžeme určit koeficienty a, b obecné rovnice přímky podle pravidla:

$$\vec{s} = (b; -a), \vec{n} = (a; b).$$

Základní příklady

1. Jak zjistit, jestli daný bod leží na přímce zadané obecnou rovnicí?

Souřadnice bodu musí vyhovovat dané rovnici.

Příklad

Přímka je určena obecnou rovnicí $3x + 4y - 24 = 0$, který z bodů $A = [4; 3]$ a $B = [5; 2]$ leží na této přímce?

$$A = [4; 3]: 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 24 = 0$$

$$12 + 12 - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

Bod A leží na přímce.

$$B = [5; 2]: 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 24 = 0$$

$$15 + 8 - 24 = 0$$

$$-1 \neq 0$$

Bod B neleží na přímce.

2. Jak určit bod, který leží na přímce určené obecnou rovnicí?

Zvolíme libovolné číslo, dosadíme za x do obecné rovnice a vypočítáme y . Bod $[x; y]$ je bodem přímky.

Druhá možnost: zvolíme libovolné číslo, dosadíme za y do obecné rovnice a vypočítáme x . Bod $[x; y]$ je bodem přímky.

Příklad

Přímka je určena obecnou rovnicí $2x - 3y + 12 = 0$. Určete alespoň dva její body.

Zvolíme $x = 3$ a dosadíme: $2 \cdot 3 - 3y + 12 = 0 \Rightarrow y = 6$. Bod $[3; 6]$ leží na dané přímce.

Zvolíme $y = 5$ a dosadíme: $2x - 3 \cdot 5 + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Bod $[\frac{3}{2}; 5]$ leží na dané přímce.

3. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [4; 7]$ a její směrový vektor je $\vec{s} = (5; -2)$.

1. krok – ze směrového vektoru určíme koeficienty a, b :

$$\vec{s} = (b; -a)$$

$$\vec{s} = (5; -2)$$

$$a = 2; b = 5$$

Rovnice přímky tedy bude:

$$2x + 5y + c = 0$$

2. krok – dosazením souřadnic bodu A do obecné rovnice přímky za x, y určíme zbývajících koeficient c :

$$A = [4; 7]: 2x + 5y + c = 0$$

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + c = 0$$

$$c = -43$$

Obecná rovnice přímky je $2x + 5y - 43 = 0$.

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:

$$-2x - 5y + 43 = 0; 4x + 10y - 86 = 0; \text{ atd.}$$

4. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a normálovým vektorem

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-1; 8]$ a její normálový vektor je $\vec{n} = (-7; 3)$.

1. krok – z normálového vektoru určíme koeficienty a, b :

$$\vec{n} = (a; b)$$

$$\vec{n} = (-7; 3)$$

$$a = -7; b = 3$$

Rovnice přímky tedy bude:

$$-7x + 3y + c = 0$$

2. krok – dosazením souřadnic bodu A do obecné rovnice přímky za x, y určíme zbývající koeficient c :

$$A = [-1; 8]: -7x + 3y + c = 0$$

$$-7 \cdot (-1) + 3 \cdot 8 + c = 0$$

$$c = -31$$

Obecná rovnice přímky je $-7x + 3y - 31 = 0$.

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:

$$7x - 3y + 31 = 0; -14x + 6y - 62 = 0; \text{atd.}$$

5. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána dvěma body

Určete obecnou rovnici přímky, která prochází body $A = [9, -1]$, $B = [3, 7]$.

Body A, B určují směrový vektor přímky, tj. $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-6; 8)$.

Dále stejně jako v příkladu 3. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem. Pro výpočet koeficientu c můžeme použít bod A nebo B , c vyjde stejné.

Obecná rovnice přímky je $-8x - 6y + 66 = 0$.

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:

$$8x + 6y - 66 = 0; 4x + 3y - 33 = 0 \text{ atd.}$$

6. Jak určit obecnou rovnici rovnoběžky s danou přímkou procházející daným bodem

Je dána přímka $p: 3x - 2y + 6 = 0$. Určete rovnici přímky q , která prochází bodem $A = [2; -5]$ a je rovnoběžná s přímkou p .

Jestliže jsou přímky rovnoběžné, pak směrový vektor jedné přímky je současně směrovým vektorem druhé přímky a podobně normálový vektor jedné přímky je současně i normálovým vektorem druhé přímky. Z toho vyplývá, že koeficienty a, b v rovnicích obou přímek budou stejné, rovnice se budou lišit pouze koeficientem c .

Rovnice přímky q bude tedy $3x - 2y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c stejným způsobem jako v předchozích příkladech:

$$A = [2; -5]: 3x - 2y + c = 0$$

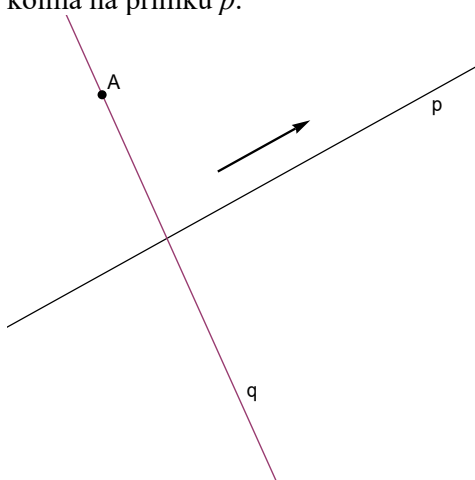
$$3 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) + c = 0$$

$$c = -16$$

Rovnice hledané přímky je $3x - 2y - 16 = 0$ a samozřejmě libovolný nenulový násobek dané rovnice.

7. Jak určit obecnou rovnici kolmice na danou přímku procházející daným bodem

Je dána přímka p : $2x - 4y + 8 = 0$. Určete rovnici přímky q , která prochází bodem $A = [-4; 7]$ a je kolmá na přímku p .



Vektor na obrázku je z hlediska zadané přímky p jejím směrovým vektorem, proto jeho souřadnice určíme z rovnice přímky p : $\vec{s}_p = (-4; -2)$.

Tento vektor je ale současně normálovým vektorem hledané přímky q : $\vec{n}_q = (-4; -2)$. U přímky q tedy známe bod a normálový vektor, a to je základní příklad 4.

$$-4x - 2y + c = 0$$

$$A = [-4; 7]: -4 \cdot (-4) - 2 \cdot 7 + c = 0$$

$$c = -2$$

$$-4x - 2y - 2 = 0$$

Rovnice hledané přímky je $-4x - 2y - 2 = 0$ a samozřejmě libovolný nenulový násobek dané rovnice.

Jednoduché pravidlo pro určení kolmé přímky

Rovnici přímky kolmé k dané přímce určíme tak, že přehodíme koeficienty a a b a u jednoho z nich (je jedno u kterého) změníme znaménko, např.:

daná přímka: $2x - 4y + 8 = 0$

kolmá přímka: $4x + 2y + c = 0$

Koeficient c určíme známým způsobem.

Dvě přímky v rovině

$$p: a_p x + b_p y + c_p = 0$$

$$q: a_q x + b_q y + c_q = 0$$

Přímky p, q jsou rovnoběžné různé, jestliže:

1. $a_p = a_q$ a zároveň $b_p = b_q$ - obě přímky mají stejné koeficienty a, b , liší se pouze koeficientem c .
nebo

$$2. \frac{a_p}{a_q} = \frac{b_p}{b_q}$$

Rovnoběžné jsou například přímky:

$$p: 4x + 5y - 6 = 0; \quad q: 4x + 5y + 12 = 0$$

$$p: 2x - 3y + 5 = 0; \quad q: 6x - 9y - 8 = 0$$

Přímky p, q jsou totožné, jestliže rovnice jedné přímky je násobkem rovnice druhé přímky.

Totožné jsou například přímky:

$$p: 4x + 5y - 6 = 0; \quad q: 8x + 10y - 12 = 0$$

Přímky p, q jsou různoběžné, jestliže:

$$\frac{a_p}{a_q} \neq \frac{b_p}{b_q}$$

Pokud jsou přímky různoběžné, pak má smysl určit jejich průsečík a odchylku.

Určení průsečíku

Rovnice obou přímek vezmeme jako soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, její řešení určuje souřadnice průsečíku obou přímek.

Určení odchylky

Odchylka α dvou přímek s normálovými nebo směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v}$ se vypočítá podle vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ musí být oba směrové nebo oba normálové.

Příklad: určete odchylku přímek $p: 4x + 5y - 6 = 0$; $q: 2x - 3y + 5 = 0$.

Vezmeme normálové vektory: $\vec{u} = (4; 5)$, $\vec{v} = (2; -3)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)|}{\sqrt{4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 0,3032$$

$$\alpha = 72,35^\circ$$

Vzdálenost bodu od přímky v rovině

Vzdálenost $|Mp|$ bodu $M = [m_1; m_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce:

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Příklad: určete vzdálenost bodu $A = [-6; 5]$ od přímky $q: 4x + 5y - 6 = 0$.

$$|Aq| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot (-6) + 5 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 0,78j$$

Vzdálenost bodu $A = [-6; 5]$ od přímky $q: 4x + 5y - 6 = 0$ je $|Aq| = 0,78$.

Vzdálenost dvou rovnoběžek

Určíme libovolný bod, který leží na jedné z rovnoběžek (je jedno na které) a pak určíme vzdálenost tohoto bodu od druhé rovnoběžky.

Příklad: určete vzdálenost rovnoběžek p, q o rovnicích

$$p: 2x + 3y - 4 = 0$$

$$q: 2x + 3y + 6 = 0$$

1. krok: určíme libovolný bod, který leží na přímce p (zvolíme libovolnou hodnotu proměnné x nebo y , zbývající proměnnou získáme dosazením zvolené hodnoty do rovnice přímky).

Např.

$$\text{zvolíme } y = 0$$

$$2x + 3 \cdot 0 - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$$M = [2; 0]$$

2. krok: určíme vzdálenost bodu M od přímky q podle příslušného vzorce.

$$|Mq| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \doteq 2,77j$$

Vzdálenost rovnoběžek je $p: 2x + 3y - 4 = 0, q: 2x + 3y + 6 = 0$ je $2,77j$.