Obecná rovnice přímky

Teorie

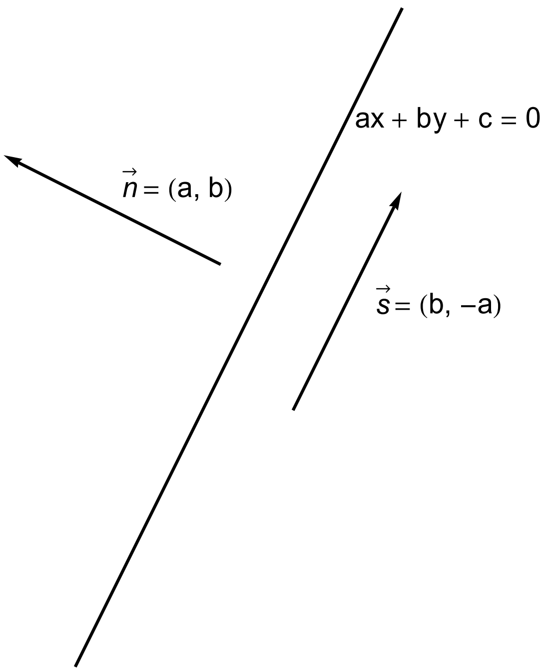
Každá přímka v rovině se dá vyjádřit lineární rovnicí tvaru:

$ax + by + c = 0$

kde a, b, c jsou reálné konstanty, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly.
Tato rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**.

$ax + by + c = 0$	obecná rovnice přímky
$\vec{s} = (b; -a)$	„základní“ **směrový** vektor přímky (rovnoběžný s přímkou)
$\vec{n} = (a; b)$	„základní“ **normálový** vektor přímky (kolmý na přímku)

Směrových a normálových vektorů je nekonečně mnoho, jsou to i libovolné nenulové násobky těchto „základních“.



Příklady obecných rovnic přímky

$3x - 5y + 2 = 0$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (3; -5)$, další normálové vektory $(6; -10), (-3; 5)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (-5; -3)$, další směrové vektory $(5; 3), (-10; -6)$ atd.

$6x - 5 = 0$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (6; 0)$, další normálové vektory $(-6; 0), (-3; 0)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (0; -6)$, další směrové vektory $(0; -3), (0; 6)$ atd.

$7y - 8 = 0$

základní normálový vektor přímky je $\vec{n} = (0; 7)$, další normálové vektory $(0; -7), (0; 2)$ atd.

základní směrový vektor přímky je $\vec{s} = (7; 0)$, další směrové vektory $(-7; 0), (3; 0)$ atd.

Základní příklady

1. Jak zjistit, jestli daný bod leží na přímce zadané obecnou rovnicí?

Souřadnice bodu musí vyhovovat dané rovnici.

Příklad

Přímka je určena obecnou rovnicí $3x+4y-24=0$, který z bodů $A=[4;\,3]$ a $B=[5;\,2]$ leží na této přímce?

$A=[4;\,3]$: $3\cdot 4+4\cdot 3-24=0$

$12+12-24=0$

$0=0$

Bod A leží na přímce.

$B=[5;\,2]$: $3\cdot 5+4\cdot 2-24=0$

$15+8-24=0$

$-1\neq 0$

Bod B neleží na přímce.

---

2. Jak určit bod, který leží na přímce určené obecnou rovnicí?

Zvolíme libovolné číslo, dosadíme za x do obecné rovnice a vypočítáme y. Bod $[x;\,y]$ je bodem přímky.

Druhá možnost: zvolíme libovolné číslo, dosadíme za y do obecné rovnice a vypočítáme x. Bod $[x;\,y]$ je bodem přímky.

Příklad

Přímka je určena obecnou rovnicí $2x-3y+12=0$. Určete alespoň dva její body.

Zvolíme $x = 3$ a dosadíme: $2\cdot 3-3y+12=0 \Rightarrow y=6$. Bod $[3;\,6]$ leží na dané přímce.

Zvolíme $y = 5$ a dosadíme: $2x-3\cdot 5+12=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$. Bod $\left[\frac{3}{2};\,5\right]$ leží na dané přímce.

---

3. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A = [4; 7] a její směrový vektor je $\vec{s}=(5;-2)$.

1. krok – ze směrového vektoru určíme koeficienty *a*, *b*:

$\vec{s}=(b;-a)$

$\vec{s}=(5;-2)$

$a=2;\,b=5$

Rovnice přímky tedy bude:

$2x+5y+c=0$

2. krok – dosazením souřadnic bodu A do obecné rovnice přímky za *x*, *y* určíme zbývající koeficient *c*:

$A=[4;7]: 2x+5y+c=0$

$2\cdot 4+5\cdot 7+c=0$

$c=-43$

Obecná rovnice přímky je $2x+5y-43=0$.

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:
$-2x-5y+43=0;\ 4x+10y-86=0;$ atd.

---

4. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a normálovým vektorem

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A = [–1; 8] a její normálový vektor je $\vec{n} = (-7;3)$.

1. krok – z normálového vektoru určíme koeficienty *a*, *b*:

$\vec{n} = (a;b)$

$\vec{n} = (-7;3)$

$a = -7;\ b = 3$

Rovnice přímky tedy bude:
$-7x + 3y + c = 0$

2. krok – dosazením souřadnic bodu A do obecné rovnice přímky za *x*, *y* určíme zbývající koeficient *c*:

$A = [-1;8]: -7x + 3y + c = 0$

$-7 \cdot (-1) + 3 \cdot 8 + c = 0$

$c = -31$

Obecná rovnice přímky je $-7x + 3y - 31 = 0$**.**

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:
$7x - 3y + 31 = 0;\ -14x + 6y - 62 = 0$; atd.

---

5. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána dvěma body

Určete obecnou rovnici přímky, která prochází body A = [9, –1], B = [3, 7].

Body *A*, *B* určují směrový vektor přímky, tj. $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-6;8)$.

Dále stejně jako v příkladu *3. Jak určit obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem*. Pro výpočet koeficientu *c* můžeme použít bod *A* nebo *B*, *c* vyjde stejné.

Obecná rovnice přímky je $-8x - 6y + 66 = 0$**.**

POZOR: správným výsledkem je také libovolný nenulový násobek této rovnice, např.:
$8x + 6y - 66 = 0;\ 4x + 3y - 33 = 0$ atd.

---

6. Jak určit obecnou rovnici rovnoběžky s danou přímkou procházející daným bodem

Je dána přímka *p*: $3x - 2y + 6 = 0$. Určete rovnici přímky *q*, která prochází bodem $A = [2;-5]$ a je rovnoběžná s přímkou *p*.

Jestliže jsou přímky rovnoběžné, pak směrový vektor jedné přímky je současně směrovým vektorem druhé přímky a podobně normálový vektor jedné přímky je současně i normálovým vektorem druhé přímky. Z toho vyplývá, že koeficienty *a*, *b* v rovnicích obou přímek budou stejné, rovnice se budou lišit pouze koeficientem *c*.

Rovnice přímky *q* bude tedy $3x - 2y + c = 0$. Zbývá určit koeficient *c* stejným způsobem jako v předchozích příkladech:

$A = [2;-5]:\ 3x - 2y + c = 0$

$3 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) + c = 0$

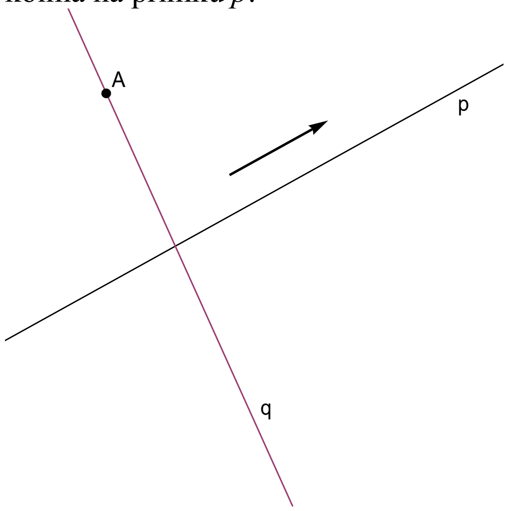
$c = -16$

Rovnice hledané přímky je $3x - 2y - 16 = 0$ **a samozřejmě libovolný nenulový násobek dané rovnice.**

---

7. Jak určit obecnou rovnici kolmice na danou přímku procházející daným bodem

Je dána přímka *p*: $2x-4y+8=0$. Určete rovnici přímky *q*, která prochází bodem $A=[-4;7]$ a je kolmá na přímku *p*.



Vektor na obrázku je z hlediska zadané přímky *p* jejím směrovým vektorem, proto jeho souřadnice určíme z rovnice přímky *p*: $\vec{s}_p=(-4;\,-2)$.

Tento vektor je ale současně normálovým vektorem hledané přímky *q*: $\vec{n}_q=(-4;-2)$. U přímky *q* tedy známe bod a normálový vektor, a to je základní příklad *4*.

$-4x-2y+c=0$

$A=[-4;\,7]:\,-4\cdot(-4)-2\cdot 7+c=0$

$c=-2$

$-4x-2y-2=0$

Rovnice hledané přímky je $-4x-2y-2=0$ a samozřejmě libovolný nenulový násobek dané rovnice.

Jednoduché pravidlo pro určení kolmé přímky

Rovnici přímky kolmé k dané přímce určíme tak, že přehodíme koeficienty *a* a *b* a u jednoho z nich (je jedno u kterého) změníme znaménko, např.:

daná přímka: $2x-4y+8=0$

kolmá přímka: $4x+2y+c=0$

Koeficient *c* určujeme známým způsobem.

Dvě přímky v rovině

$p: a_p x + b_p y + c_p = 0$

$q: a_q x + b_q y + c_q = 0$

Přímky *p*, *q* jsou rovnoběžné různé, jestliže:

1. $a_p = a_q$ a zároveň $b_p = b_q$ - obě přímky mají stejné koeficienty *a*, *b*, liší se pouze koeficientem *c*.

nebo

2. $\frac{a_p}{a_q} = \frac{b_p}{b_q}$

Rovnoběžné jsou například přímky:

$p: 4x + 5y - 6 = 0;\ q: 4x + 5y + 12 = 0$

$p: 2x - 3y + 5 = 0;\ q: 6x - 9y - 8 = 0$

Přímky *p*, *q* jsou totožné, jestliže rovnice jedné přímky je násobkem rovnice druhé přímky.

Totožné jsou například přímky:

$p: 4x + 5y - 6 = 0;\ q: 8x + 10y - 12 = 0$

Přímky *p*, *q* jsou různoběžné, jestliže:

$\frac{a_p}{a_q} \neq \frac{b_p}{b_q}$

Pokud jsou přímky různoběžné, pak má smysl určit jejich průsečík a odchylku.

Určení průsečíku

Rovnice obou přímek vezmeme jako soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, její řešení určuje souřadnice průsečíku obou přímek.

Určení odchylky

Odchylka α dvou přímek s normálovými nebo směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ se vypočítá podle vzorce:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \alpha \in \langle 0°; 90° \rangle$$

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ musí být oba směrové nebo oba normálové.

Příklad: určete odchylku přímek $p: 4x + 5y - 6 = 0$; $q: 2x - 3y + 5 = 0$.

Vezmeme normálové vektory: $\vec{u} = (4; 5)$, $\vec{v} = (2; -3)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)|}{\sqrt{4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 0{,}3032$$

$\alpha = 72{,}35°$

Vzdálenost bodu od přímky v rovině

Vzdálenost $|Mp|$ bodu $M=[m_1;\, m_2]$ od přímky $p: ax+by+c=0$ se vypočítá podle vzorce:

$$|Mp|=\frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Příklad: určete vzdálenost bodu $A=[-6;\, 5]$ od přímky $q: 4x+5y-6=0$.

$$|Aq|=\frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4\cdot(-6)+5\cdot 5-6|}{\sqrt{4^2+5^2}}=0{,}78$$

Vzdálenost bodu $A=[-6;\, 5]$ od přímky $q: 4x+5y-6=0$ je $|Aq|=0{,}78$.